Exponentialgleichungen

Vorgehensweise: Exponentialgleichungen lösen

Exponentialgleichungen verwenden ebenfalls Potenzen. Allerdings wird hier x im Exponenten geführt.
Beispiel: $2^x = 16$ Gesucht ist hier also die Zahl x, die als Exponent zur Basis 2 den Wert 16 ergibt.
Nun ist diese Gleichung durch einfaches Probieren lösbar, da 16 eine Potenz von 2 ist.

\begin{equation} \begin{aligned} 2^x &= 16 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4 \end{aligned} \end{equation}

Die Gleichung lässt sich also dadurch lösen, dass beide Seiten auf die gleiche Basis (hier: 2) umgeformt werden.

Ein weiteres Beispiel:

\begin{equation} \begin{aligned} 3^4x &= 9 \\ 3^4x &= 3^2 \\ 4 x &= 2 ~~| :4 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \end{equation}

Wie sieht es nun aus bei Gleichungen bei denen beide Gleichungsseiten keine gemeinsame Basis haben? Nun hier lässt sich eine gemeinsame Basis erzwingen, indem man die beiden Zahlen z.B. zur Basis 10 darstellt.
Beispiel: $3^x = 2$

\begin{equation} \begin{aligned} 3^x &= 2 \\ log_{10}(3) &= 0,4771 \\ 3 &= 10^{0,4771} \\ log_{10}(2) &= 0,3010 \\ 2 &= 10^{0,3010} \\ \end{aligned} \end{equation}

Der Logrithmus zur Basis 10 wird häufig als lg oder log abgekürzt. Es gibt weitere bedeutende Logarithmen. Z.B. den **Logarithmus naturalis** ln zur Basis e[1] oder den **Logarithmus Dualis** ld zur Basis 2, der besonders in der Digitaltechnik seine Bedeutung hat.

Nun lässt sich die eigentliche Gleichung lösen.

\begin{equation} \begin{aligned} 3^x &= 2 \\ (10^{0,4771})^x &= 10^{0,3010} ~~|~ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ 10^{0,4771 \cdot x} &= 10^{0,3010} \\ 0,4771 \cdot x &= 0,3010 ~~|~ :0,4771\\ x &= \frac{0,3010}{0,4771} \\ x &=0,6309 \end{aligned} \end{equation}

Oder allgemein mit Logarithmen:

\begin{equation} \begin{aligned} 3^x &= 2 \\ (10^{lg (3)})^x &= 10^{lg (2)} ~~|~ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ 10^{lg (3) \cdot x} &= 10^{lg (2)} \\ lg(3) \cdot x &= lg (2) ~~|~ :lg (3)\\ x &= \frac{lg (2)}{lg (3)} \\ x &=0,6309 \end{aligned} \end{equation}

Wenn man die letzte Berechnung genauer betrachtet, so kann man feststellen, dass sich die ersten beiden Schritt (auf die gleiche Basis umformen) als überflüssig erweisen. Man kann also direkt den Logarithmus nutzen.

\begin{equation} \begin{aligned} 3^x &= 2 ~~|~ lg\\ lg(3) \cdot x &= lg(2) ~~|~ :lg(3)\\ x &= \frac{lg(2)}{lg(3)} \\ x &=0,6309 \end{aligned} \end{equation}

Weitere Rechenregeln zu Potenzen und Logarithmen

Potenzgesetze

Potenzgesetze			
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n=\left(a \cdot b \right)^n$	$~~~\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$
$a^0 =1$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$

Rechenregeln Logarithmus

WICHTIG: Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert. D.h. $2^x = -2$ hat keine Lösung! Im Folgenden werden einige Rechenregeln dargestellt, die den Umgang mit Logarithmen vereinfachen.

Rechenregeln für Logarithmen		
$lg (a^n) = n \cdot lg (a) ~~|~ a,b > 0$	$lg (a \cdot b) = lg (a) + lg (b)$	$lg \left(\frac{a}{b} \right) = lg (a) - lg (b)$

Aufgaben zur Logarithmen

Die folgenden Aufgaben dienen zur Vertiefung der obigen Inhalte. Berechnen Sie jeweils den Wert von x.

Aufgaben:		
a) $4^x = 11$	b) $8^x = 5^{x+1}$	c) $2^{6 x +2} = 12$
d) $3 \cdot 7^{2x -3}=16$	e) $4 \cdot 9^{2x} = 6^x$	f) $3^{4x-1} = 2^x$

Lösungen (unsortiert):		
$x = 0,2642$	$x = 1,9301$	$x = 0,2968$
$x = -0,5326$	$x = 1,7297$	$x = 3,4243$

1)

e ist die Euler'sche Zahl; $e=2,718281828$