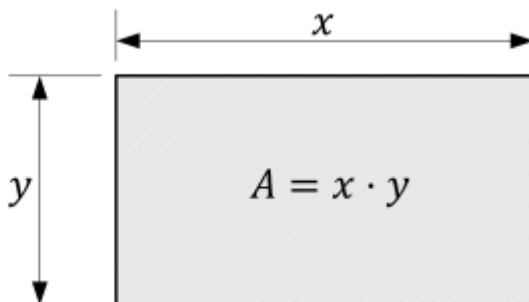


# Extremwertaufgaben

## Beispiel Rechteckfläche

Es soll ein rechteckiger Sandkasten gebaut werden. Der Sandkasten soll flächenmäßig so groß wie möglich werden. Zur Verfügung stehen zwei 8 m lange Bretter. Wie lang müssen die Kanten gewählt werden, damit die Grundfläche des Sandkastens maximal wird?

### 1. Skizze erstellen



### 2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Fläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu:  
 $A = x \cdot y$

### 3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Es stehen zwei Bretter je 8 m zur Verfügung. Der Umfang beträgt demnach 16 m!

$\rightarrow$  Nebenbedingung:  $2 \cdot x + 2 \cdot y = 16$   $\rightarrow$   $x + y = 8$   $\rightarrow$   $y = 8 - x$

### 4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$$

### 5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung:  $A'(x) = 0$

$$A'(x) = 8 - 2x = 0 \rightarrow x = 4$$

Hinreichende Bedingung:  $A''(x) \neq 0$

$$A''(4) = -2 < 0 \rightarrow \text{Es handelt sich um ein Maximum} \checkmark$$

## 6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von  $x$  in die Nebenbedingung kann nun noch  $y$  bestimmt werden:

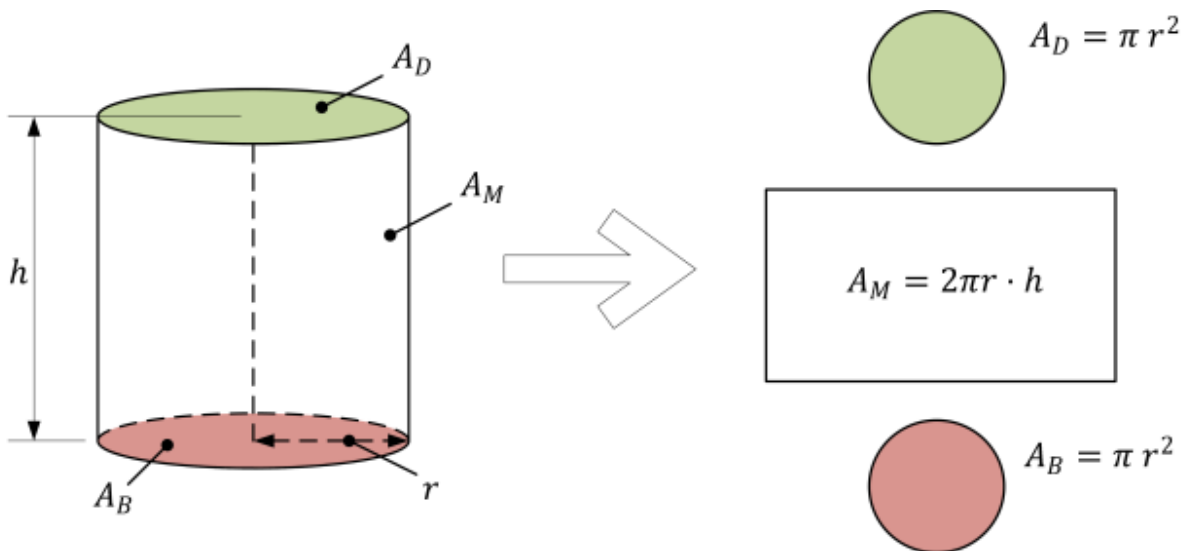
$$y = 8 - x = 8 - 4 = 4$$

**Antwort:** Die größte Fläche resultiert wenn als Grundfläche ein Quadrat mit den Kantenlängen  $x = y = 4$  gewählt wird.

## Beispiel Dosenoptimierung

Es soll Suppe mit dem Volumen  $V = 800 \text{ ml}$  in einer Dose verpackt werden. Dabei soll der Blechverbrauch minimal werden. Bestimmen Sie das optimale Verhältnis zwischen Höhe  $h$  und Radius  $r$  der Dose.

### 1. Skizze erstellen



### 2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Oberfläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu:  $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

### 3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Das Volumen der Dose soll 800 ml betragen!

$$\rightarrow \text{Nebenbedingung: } V=0,8 \text{ dm}^3 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\rightarrow h = \frac{0,8 \text{ dm}^3}{\pi \cdot r^2}$$

### 4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{0,8 \text{ dm}^3}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{1,6 \text{ dm}^3}{r} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 1,6 \text{ dm}^3 \cdot r^{-1}$$

### 5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung:  $A'(r)=0$

$$A'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - \frac{1,6}{r^2} = 0 \rightarrow 4 \cdot \pi \cdot r = \frac{1,6}{r^2} \rightarrow r^3 = \frac{1,6}{4 \cdot \pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1,6}{4 \cdot \pi}} \approx 0,5 \text{ dm}$$

Hinreichende Bedingung:  $A''(r) \neq 0$

$$A'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 1,6 \cdot r^{-2} \rightarrow A''(r) = 4 \cdot \pi + 2 \cdot 1,6 \cdot r^{-3} = 4 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1,6}{r^3}$$

$\rightarrow A''(0,5) = 4 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1,6}{0,5^3} \approx 38,2 > 0 \rightarrow$  Es handelt sich um ein Minimum  $\checkmark$

### 6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von  $r$  in die Nebenbedingung kann nun noch  $h$  bestimmt werden:

$$h(r) = \frac{0,8}{\pi \cdot r^2} \rightarrow h(0,5) = \frac{0,8}{\pi \cdot 0,5^2} \approx 1,02 \text{ dm}$$

**Antwort:** Bei einem Radius von  $r=0,5 \text{ dm}=5 \text{ cm}$  und einer Höhe von  $h=1,02 \text{ dm}=10,2 \text{ cm}$  resultiert für eine Dose mit einem Volumen von 800 ml der minimale Materialverbrauch.

## Kostenoptimierung

Die Gewinnes eines Unternehmens sollen optimiert werden. Bei einer entsprechenden Analyse konnten die Kosten  $K$  als Funktion

$$K(x) = 0,04 x^3 - 0,64 x^2 + 3,6 x + 2$$

Das Unternehmen stellt große Mengen her, daher stellt  $x$  die Menge in 10.000 Stück dar und die Kosten  $K$  sind in 10.000 € dargestellt.

Der Erlös <sup>1)</sup> kann in Abhängigkeit der verkauften Waren  $x$  als Erlösfunktion  $E(x)$  dargestellt werden:

$$E(x) = -0,16 x^2 + 2,76 x$$

a) Wie viel Stück Ware sollten produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?

b) Wie groß ist der Maximalgewinn?

c) Wie groß ist der Erlös pro Stück beim Maximalgewinn?

Lösungsskizze:

a)

- Gewinn  $G(x) = E(x) - K(x)$   
(Gewinn = Erlös - Kosten)
- $G'(x)$  und  $G''(x)$  bestimmen
- Maximum mittels  $G'(x_E) = 0$  berechnen
- Mit  $G''(x)$  überprüfen
- $Menge_{\max} = x_E \cdot 10.000$  Stk  
gemeint ist die Menge (Stück) an Waren

b)

- $Maximalgewinn = G(x_E) \cdot 10.000$  €  
(10.000€ s. Normierung für  $K(x)$ )

c)

- $Gesamterlös = E(x_E) \cdot 10.000$  €  
für die gesamte Menge in €
- $Stückerlös = \frac{\text{Gesamterlös}}{x_E \cdot 10.000}$  €  
Erlös für jedes einzelne Stück

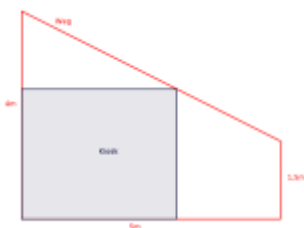
## Aufgaben zu Extremwertaufgaben aus dem Buch

Die folgenden Aufgaben sind nach Themen sortiert und können im Buch „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **1. Druck 2014** gefunden werden.

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Aufgabe	192	A1	$a=5; b=5; d=7,07$
Aufgabe	192	A2	In der Aufgabenstellung muss es gleichschenkliges Dreieck heißen! $g=40; a=40; h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95; b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7; h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4; A_{\max}=8m^2$ ACHTUNG: Fehler in der Skizze (s.u.)
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3; k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$ ; b) $l_1=4 \text{ LE}, l_2=\frac{8}{3} \text{ LE}$
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5; v=2,53125$ ; b) $A_{\max} \approx 3,8 \text{ FE}$ ; ...
		A13	c) max: $u \approx 1,15 \text{ \&} v \approx 2,99$ ; min: $u \approx 2,38 \text{ \&} v=0$ ; ...
		A13	d) $U_{\max}=8,29 \text{ LE}; U_{\min}=4,76 \text{ LE}$

/\* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | \*



Korrektur Skizze: S.192 A5 (Kiosk)

Für „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **2. Druck 2015** gilt:

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423
Aufgabe	192	A1	$a=5; b=5; d=7,07$
Aufgabe	192	A2	$g=40; a=40; h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95; b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7; h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4; A_{\max}=8m^2$
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3; k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$ ; b) $l_1=4 \text{ LE}, l_2=\frac{8}{3} \text{ LE}$
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5; v=2,53125$ ; b) $A_{\max} \approx 3,8 \text{ FE}$ ; ...
	193	A13	c) max: $u \approx 1,15 \text{ \&} v \approx 2,99$ ; min: $u \approx 2,38 \text{ \&} v=0$ ; ...
	193	A13	d) $U_{\max}=8,29 \text{ LE}; U_{\min}=4,76 \text{ LE}$

/\* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | \*

## Weitere Extremwertaufgaben

Weitere Aufgaben Pfeffer 7. Auflage S. 226!

1)

Umsatz oder auch Einnahmen; NICHT Gewinn

From:

<http://www.kopfload.de/> - **kopfload - Lad Dein Hirn auf!**

Permanent link:

<http://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:extremw:aufgaben>

Last update: **2025/11/19 16:15**

