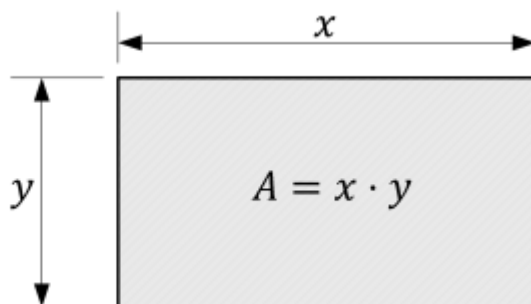


Extremwertaufgaben

Beispiel Rechteckfläche

Es soll ein rechteckiger Sandkasten gebaut werden. Der Sandkasten soll flächenmäßig so groß wie möglich werden. Zur Verfügung stehen zwei 8 m lange Bretter. Wie lang müssen die Kanten gewählt werden, damit die Grundfläche des Sandkastens maximal wird?

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Fläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu:
 $A = x \cdot y$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Es stehen zwei Bretter je 8 m zur Verfügung. Der Umfang beträgt demnach 16 m!

\rightarrow Nebenbedingung: $2 \cdot x + 2 \cdot y = 16$ \rightarrow $x + y = 8$ \rightarrow $y = 8 - x$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$

$$A'(x) = 8 - 2x = 0 \rightarrow x = 4$$

Hinreichende Bedingung: $A''(x) \neq 0$

$A''(4) = -2 < 0 \rightarrow$ Es handelt sich um ein Maximum

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von x in die Nebenbedingung kann nun noch y bestimmt werden:

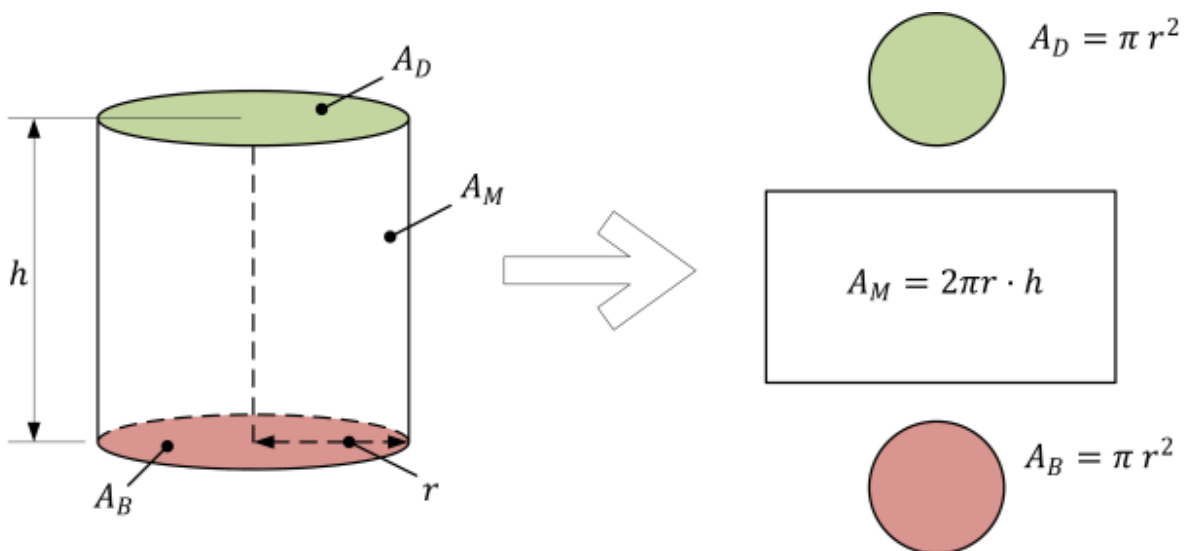
$$y = 8 - x = 8 - 4 = 4$$

Antwort: Die größte Fläche resultiert wenn als Grundfläche ein Quadrat mit den Kantenlängen $x = y = 4$ gewählt wird.

Beispiel Dosenoptimierung

Es soll Suppe mit dem Volumen $V = 800$ ml in einer Dose verpackt werden. Dabei soll der Blechverbrauch minimal werden. Bestimmen Sie das optimale Verhältnis zwischen Höhe h und Radius r der Dose.

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Oberfläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu: $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Das Volumen der Dose soll 800 ml betragen!

$$\rightarrow \text{Nebenbedingung: } V = 0,8 \text{ dm}^3 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\rightarrow h = \frac{0,8 \text{ dm}^3}{\pi \cdot r^2}$$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{0,8 \text{ dm}^3}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{1,6 \text{ dm}^3}{r} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 1,6 \text{ dm}^3 \cdot r^{-1}$$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(r) = 0$

$$A'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - \frac{1,6}{r^2} = 0 \rightarrow 4 \cdot \pi \cdot r = \frac{1,6}{r^2} \rightarrow r^3 = \frac{1,6}{4 \cdot \pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1,6}{4 \cdot \pi}} \approx 0,5 \text{ dm}$$

Hinreichende Bedingung: $A''(r) \neq 0$

$$A'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 1,6 \cdot r^{-2} \rightarrow A''(r) = 4 \cdot \pi + 2 \cdot 1,6 \cdot r^{-3} = 4 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1,6}{r^3}$$

$\rightarrow A''(0,5) = 4 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1,6}{0,5^3} \approx 38,2 > 0 \rightarrow$ Es handelt sich um ein Minimum \checkmark

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von r in die Nebenbedingung kann nun noch h bestimmt werden:

$$h(r) = \frac{0,8}{\pi \cdot r^2} \rightarrow h(0,5) = \frac{0,8}{\pi \cdot 0,5^2} \approx 1,02 \text{ dm}$$

Antwort: Bei einem Radius von $r = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}$ und einer Höhe von $h = 1,02 \text{ dm} = 10,2 \text{ cm}$ resultiert für eine Dose mit einem Volumen von 800 ml der minimale Materialverbrauch.

Kostenoptimierung

Die Gewinnes eines Unternehmens sollen optimiert werden. Bei einer entsprechenden Analyse konnten die Kosten K als Funktion

$$K(x) = 0,04 x^3 - 0,64 x^2 + 3,6 x + 2$$

Das Unternehmen stellt große Mengen her, daher stellt x die Menge in 10.000 Stück dar und die Kosten K sind in 10.000 € dargestellt.

Der Erlös ¹⁾ kann in Abhängigkeit der verkauften Waren x als Erlösfunktion $E(x)$ dargestellt werden:

$$E(x) = -0,16 x^2 + 2,76 x$$

- Wie viel Stück Ware sollten produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
- Wie groß ist der Gesamtgewinn?
- Wie groß ist der Erlös pro Stück?

Aufgaben zu Extremwertaufgaben aus dem Buch

Die folgenden Aufgaben sind nach Themen sortiert und können im Buch „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **1. Druck 2014** gefunden werden.

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423
Aufgabe	192	A1	$a=5$; $b=5$; $d=7,07$
Aufgabe	192	A2	In der Aufgabenstellung muss es gleichschenkliges Dreieck heißen! $g=40$; $a=40$; $h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95$; $b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7$; $h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4$; $A_{\max}=8m^2$
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3$; $k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$; b) $l_1=4$ LE , $l_2=\frac{8}{3}$ LE
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5$; $v=2,53125$; b) $A_{\max} \approx 3,8$ FE \$; ...
		A13	c) max: $u \approx 1,15$ & $v \approx 2,99$ \$; min: $u \approx 2,38$ & $v=0$; ...
		A13	d) $U_{\max}=8,29$ LE ; $U_{\min}=4,76$ LE

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *

Für „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **2. Druck 2015** gilt:

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung		Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise		Erklärung	
Aufgaben		A1, A2	siehe S.
Aufgabe		A1	$a=5; b=5; d=7,07$
Aufgabe		A2	$g=40; a=40; h=34,64$
Aufgabe		A3	$a=10,95; b=10,95$
Aufgabe		A4	$r=0,7; h=0,7$
Aufgabe		A5	$x=4; A_{\max}=8m^2$
Aufgabe		A6	$x \approx 3,3; k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe		A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$; b) $l_1=4 \text{ LE}, l_2=\frac{8}{3} \text{ LE}$
Aufgabe		A13	a) $u=1,5; v=2,53125$; b) $A_{\max} \approx 3,8 \text{ FE}$; ...
		A13	c) max: $u \approx 1,15 \text{ €}; v \approx 2,99$ \$; min: $u \approx 2,38 \text{ €}; v=0$; ...
		A13	d) $U_{\max}=8,29 \text{ LE}; U_{\min}=4,76 \text{ LE}$

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *

Weitere Extremwertaufgaben

Weitere Aufgaben Pfeffer 7. Auflage S. 226!

1)

Umsatz oder auch Einnahmen; NICHT Gewinn

From:
<http://www.kopfload.de/> - kopfload - Lad Dein Hirn auf!

Permanent link:
<http://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:extremw:aufgaben&rev=1584553209>

Last update: 2025/11/19 16:13

