

Vorgehensweise: Wurzelgleichungen lösen

Zunächst muss bei einer quadratischen Gleichung \sqrt{x} von der Wurzel befreit werden. Dies geschieht mittels der Quadratur der Gleichung. Dabei erhält man aber unter Umständen eine weitere Lösung, die die ursprüngliche Gleichung eventuell nicht löst. Die **Quadratur** ist demnach **keine äquivalente Termumformung**, bei der die Definitions- und Lösungsmenge immer konstant bleibt. Trotzdem hilft sie bei der Lösungsfindung. Man muss lediglich beachten, die gefundenen Lösungen durch eine Probe zu überprüfen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x-17 && \sim \text{quadrieren} \\ (x-17)^2 &= 2x+1 && \sim \text{Binom auflösen} \\ x^2 - 34x + 289 &= 2x+1 && \sim -2x -1 \parallel 0 \\ x^2 - 36x + 288 &= 0 && \sim \text{pq-Formel} \\ x_{1,2} &= \frac{36 \pm \sqrt{\left(\frac{-36}{2}\right)^2 - 288}}{2} && \sim \text{pq-Formel} \\ &= 18 \pm \sqrt{324 - 288} && \sim \text{pq-Formel} \\ &= 18 \pm 6 && \sim \text{pq-Formel} \\ &\implies x_1 = 12 \text{ und } x_2 = 24 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= 12 \\ \sqrt{2 \cdot 12 + 1} &= 12 - 17 \\ \sqrt{25} &= -5 \\ 5 &= -5 && \sim \text{falsch} \\ &\implies x_1 = 12 \text{ löst die ursprüngliche Gleichung nicht!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_2 &= 24 \\ \sqrt{2 \cdot 24 + 1} &= 24 - 17 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ 7 &= 7 && \sim \text{wahr} \\ &\implies x_2 = 24 \text{ löst die ursprüngliche Gleichung!} \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{24\}$

Musteraufgabe

$$\begin{aligned} \sqrt{x-9} &= 1 && \sim \text{quadrieren} \\ x-9 &= 1 && \sim +9 \parallel x \\ x &= 10 && \sim \text{Probe: } \sqrt{10-9} = 1 \\ &= 1 && \sim \text{wahr} \end{aligned}$$

Aufgaben:			
a) $2 - \sqrt{x} = 1$	b) $\sqrt{x} - 2 = -3$	c) $\sqrt{4-x} = 2$	d) $\sqrt{x} - 8 = 2$
e) $\sqrt{4x-5} + 6 = 0$	f) $5 \cdot \sqrt{4x-5} = 20$	g) $5 - \sqrt{x-6} = 2$	h) $\sqrt{4x+6} = 5$
i) $\sqrt{2x+1} - 1 = -6$	j) $10 + \sqrt{2x-3} = 5$	k) $7 + \sqrt{5x+4} = 10$	

Lösungen (unsortiert)	
$L = \{1\}$ (kommt zweimal vor)	$L = \{100\}$ $L = \{15\}$ $L = \{-\frac{5}{4}\}$ $L = \{0\}$ $L = \{\frac{21}{4}\}$
$L = \{\}$ (leere Menge; Quadratwurzel darf nicht negativ sein) (kommt dreimal vor)	

Aufwendigere Aufgaben zu

Wurzelgleichungen

Beispiel mit zwei gleichen Wurzeln:

Erst zusammenfassen, dann quadrieren und auflösen.

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{x+1} - 1 &= 3 \cdot \sqrt{x+1} + 3 && | - 3 \cdot \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} &= 4 && | : 2 \\ \sqrt{x+1} &= 2 && | \text{quadrieren} \\ x+1 &= 4 && | - 1 \\ x &= 3 && | \text{Probe: } \\ 5 \cdot \sqrt{3+1} - 1 &= 3 \cdot \sqrt{3+1} + 3 \\ 5 \cdot 2 - 1 &= 3 \cdot 2 + 3 \\ 9 &= 9 && | \text{wahr} \end{aligned}$$

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln

Erst Wurzel isolieren, dann beidseitig quadrieren und auflösen.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{4x+10} - 4 \cdot \sqrt{2x+6} &= 0 && | + 4 \cdot \sqrt{2x+6} \\ 3 \cdot \sqrt{4x+10} &= 4 \cdot \sqrt{2x+6} && | \text{quadrieren} \\ 9 \cdot (4x+10) &= 16 \cdot (2x+6) && | \text{auflösen} \\ 36x + 90 &= 32x + 96 && | - 90 \\ -32x &= 6 && | : -32 \\ x &= 1,5 && | \text{Probe: } \\ 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 1,5 + 10} - 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 1,5 + 6} &= 3 \cdot \sqrt{16} - 4 \cdot \sqrt{9} &= 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 &= 0 \\ \text{wahr} & & & | \text{L} = \{ 1,5 \} \end{aligned}$$

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln und absolutem Element

Wurzeln nach einander durch quadrieren auflösen.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} - 3 &= 0 && | + 3 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} &= 3 && | \text{quadrieren} \\ (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4})^2 &= 9 && | \text{Binom anwenden mit } a = 3 \text{ und } b = \sqrt{x-1} \\ x-1 + x-4 + 2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} &= 9 && | - 5 \\ 2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} &= 4 && | : 2 \\ \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} &= 2 && | \text{quadrieren} \\ x-1 &= 4 && | + 1 \\ x &= 5 && | \text{Probe: } \\ \sqrt{5-1} + \sqrt{5-4} - 3 &= 2 + 1 - 3 &= 0 \\ \text{wahr} & & & | \text{L} = \{ 5 \} \end{aligned}$$

Aufgaben mit aufwendigeren Wurzelgleichungen:		
a) $\sqrt{3x} - 1 = 5$ $\sqrt{3x} + 5$	b) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x+1} - 1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x+1} + 1$	c) $3 \cdot \sqrt{3x-5} - 2 = 2 \cdot \sqrt{3x-5} + 2$
d) $\sqrt{\frac{1}{3}x+7} - \sqrt{\frac{1}{2}x+6} = 0$	e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+9} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x+14} = 0$	f) $\sqrt{3x-7} - \sqrt{4x-9} = 0$
g) $5 \cdot \sqrt{3x-8} - \sqrt{7x+4} = 0$	h) $7 \cdot \sqrt{15x+4} - 3 \cdot \sqrt{50-3x} = 0$	i) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1$
j) $\sqrt{4x-3} + 2 \cdot \sqrt{x} = 3$	k) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 9$	l) $\sqrt{2(x+1)} + \sqrt{2x+15} = 13$

Lösungen (unsortiert)

$L=\{3\}$ $L=\{7\}$ $L=\{12\}$ $x=2$ $L=\{\}$ $L=\{6\}$ $L=\{3\}$ $L=\{\frac{1}{3}\}$ $L=\{-5\}$ $L=\{16\}$ $L=\{1\}$ $L=\{19\}$
 $L=\{17\}$

From:

<https://www.kopfload.de/> - **kopfload - Lad Dein Hirn auf!**

Permanent link:

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:arithmetik:einfuehr_wurzeln

Last update: **2025/11/19 16:15**

