

Vorgehensweise: Wurzelgleichungen lösen

Zunächst muss bei einer quadratischen Gleichung \sqrt{x} von der Wurzel befreit werden. Dies geschieht mittels der Quadratur der Gleichung. Dabei erhält man aber unter Umständen eine weitere Lösung, die die ursprüngliche Gleichung eventuell nicht löst. Die **Quadratur** ist demnach **keine äquivalente Termumformung**, bei der die Definitions- und Lösungsmenge immer konstant bleibt. Trotzdem hilft sie bei der Lösungsfindung. Man muss lediglich beachten, die gefundenen Lösungen durch eine Probe zu überprüfen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x-17 && \sim \text{quadrieren} \\ (x-17)^2 &= 2x+1 && \sim \text{Binom auflösen} \\ x^2 - 34x + 289 &= 2x+1 && \sim -2x -1 \parallel 0 \\ x^2 - 36x + 288 &= 0 && \sim \text{pq-Formel} \\ x_{1,2} &= \frac{36 \pm \sqrt{\left(\frac{-36}{2}\right)^2 - 288}}{2} && \sim \sqrt{324 - 288} \\ &= 18 \pm 6 && \implies x_1 = 12 \text{ und } x_2 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= 12 \\ \sqrt{2 \cdot 12 + 1} &= 12 - 17 \\ \sqrt{25} &= -5 \\ 5 &= -5 && \implies \text{falsch} \\ &&& \implies x_1 = 12 \text{ löst die ursprüngliche Gleichung nicht!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_2 &= 24 \\ \sqrt{2 \cdot 24 + 1} &= 24 - 17 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ 7 &= 7 && \implies \text{wahr} \\ &&& \implies x_2 = 24 \text{ löst die ursprüngliche Gleichung!} \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{24\}$

Musteraufgabe

$$\begin{aligned} \sqrt{x-9} &= 1 && \sim \text{quadrieren} \\ x-9 &= 1 && \sim +9 \parallel x \\ x &= 10 && \text{Probe: } \sqrt{10-9} = 1 \\ &&& 1 = 1 && \implies \text{wahr} \end{aligned}$$

Aufgaben:			
a) $2 - \sqrt{x} = 1$	b) $\sqrt{x} - 2 = -3$	c) $\sqrt{4-x} = 2$	d) $\sqrt{x} - 8 = 2$
e) $\sqrt{4x-5} + 6 = 0$	f) $5 \cdot \sqrt{4x-5} = 20$	g) $5 - \sqrt{x-6} = 2$	h) $\sqrt{4x+6} = 5$
i) $\sqrt{2x+1} - 1 = -6$	j) $10 + \sqrt{2x-3} = 5$	k) $7 + \sqrt{5x+4} = 10$	

Lösungen (unsortiert)
$L = \{1\}$ (kommt zweimal vor) $L = \{100\}$ $L = \{15\}$ $L = \{-\frac{5}{4}\}$ $L = \{0\}$ $L = \{\frac{21}{4}\}$
$L = \{\}$ (leere Menge; Quadratwurzel darf nicht negativ sein) (kommt dreimal vor)

Aufwendigere Aufgaben zu

Wurzelgleichungen

Beispiel mit zwei gleichen Wurzeln:

Erst zusammenfassen, dann quadrieren und auflösen.

$$5 \cdot \sqrt{x+1} - 1 = 3 \cdot \sqrt{x+1} + 3 \quad | -3 \cdot \sqrt{x+1} \quad | +1 \quad | \cdot 2 \quad | \text{quadrieren} \quad | -1 \quad | \cdot 5 \quad | \text{Probe:} \quad | 5 \cdot \sqrt{3+1} - 1 = 3 \cdot \sqrt{3+1} + 3 \quad | 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 2 + 3 \quad | 9 = 9 \quad | \text{wahr} \quad | L = \{ 3 \}$$

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln

Erst Wurzel isolieren, dann beidseitig quadrieren und auflösen.

$$3 \cdot \sqrt{4x+10} - 4 \cdot \sqrt{2x+6} = 0 \quad | +4 \cdot \sqrt{2x+6} \quad | \text{quadrieren} \quad | 9 \cdot (4x+10) = 16 \cdot (2x+6) \quad | \text{auflösen} \quad | 36x + 90 = 32x + 96 \quad | -90 \quad | -32x \quad | 4x = 6 \quad | \cdot 1,5 \quad | \text{Probe:} \quad | 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 1,5 + 10} - 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 1,5 + 6} = 3 \cdot \sqrt{16} - 4 \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0 \quad | \text{wahr} \quad | L = \{ 1,5 \}$$

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln und absolutem Element

Wurzeln nach einander durch quadrieren auflösen.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} - 3 = 0 \quad | +3 \quad | -\sqrt{x-1} \quad | \sqrt{x-4} = 3 - \sqrt{x-1} \quad | \text{quadrieren} \quad | x-4 = \left(3 - \sqrt{x-1} \right)^2 \quad | \text{2. Binom anwenden mit } a = 3 \text{ und } b = -\sqrt{x-1} \quad | x-4 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1} + (x-1) \quad | +6 \cdot \sqrt{x-1} \quad | +4 \quad | \text{Rest fällt weg} \quad | 6 \cdot \sqrt{x-1} = 12 \quad | :6 \quad | \text{quadrieren} \quad | x-1 = 4 \quad | \text{Leftrightarrow} \quad | x = 5 \quad | \text{Probe:} \quad | \sqrt{5-1} + \sqrt{5-4} - 3 = 2 + 1 - 3 = 0 \quad | \text{wahr} \quad | L = \{ 5 \}$$

Aufgaben mit aufwendigeren Wurzelgleichungen:		
a) $2 - \sqrt{x} = 1$	b) $\sqrt{x} - 2 = -3$	c) $\sqrt{4-x} = 2$
d) $\sqrt{x} - 8 = 2$		
Lösungen (unsortiert)		

From: <https://www.kopfload.de/> - kopfload - Lad Dein Hirn auf!
 Permanent link: https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:arithmetik:einfuehr_wurzeln&rev=1457446289
 Last update: 2025/11/19 16:13



