Vorgehensweise: Wurzelgleichungen lösen

Zunächst muss bei einer quadratischen Gleichung x von der Wurzel befreit werden. Dies geschieht mittels der Quadratur der Gleichung. Dabei erhält man aber unter Umständen eine weitere Lösung, die die ursprüngliche Gleichung eventuell nicht löst. Die **Quadratur** ist demnach **keine äquivalente Termumformung**, bei der die Definitions- und Lösungsmenge immer konstant bleibt. Trotzdem hilft sie bei der Lösungsfindung. Man muss lediglich beachten, die gefundenen Lösungen durch eine Probe zu überprüfen.

Beispiel:

\begin{equation} \begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x-17 & &|~ \text{quadrieren} \\ 2x+1 &= (x-17)^2 & &|~ \text{Binom auflösen} \\ 2x+1 &= x^2 - 34 x + 289 & &|~ -2x -1 \\ 0 &= x^2 - 36 x + 288 & &|~ \text{pq-Formel} \\ x_{1,2} &= - \frac{-36}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-36}{2} \right)^2 - 288 } \\ &=18 \pm \sqrt{324 – 288} \\ &=18 \pm 6 ~~ \implies x_1 = 12 \text{ und } x_2 = 24 \\ \end{aligned} \end{equation}

\begin{equation} \begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &=12 \\ \sqrt{2 \cdot 12 +1 } &= 12 -17 \\ \sqrt{25} &= -5 \\ 5 &= -5 ~~ \implies \text{falsch}~~ \implies x_1=12 ~~\text{löst die ursprüngliche Gleichung \textbf{nicht!}} \\ \end{aligned} \end{equation}

\begin{equation} \begin{aligned} \text{Probe: } x_2 &=24 \\ \sqrt{2 \cdot 24+1 } &= 24 -17 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ 7 &= 7 ~~ \implies \text{wahr}~~ \implies x_2=24 ~~\text{löst die ursprüngliche Gleichung!}\\ \end{aligned} \end{equation}

Lösungsmenge $L= \lbrace 24 \rbrace$

Musteraufgabe

\begin{equation} \begin{aligned} \sqrt{x-9} &=1 ~~| \text{quadrieren} \\ x-9 &= 1 ~~| +9 \\ x &= 10 \\ \text{Probe:}\\ \sqrt{10-9}&=1 \\ 1&=1 ~~\implies ~\text{wahr} \end{aligned} \end{equation}

Aufgaben:			
a) $2 – \sqrt{x} = 1$	b) $\sqrt{x}-2 = -3$	c) $\sqrt{4-x}= 2$	d) $\sqrt{x}-8= 2$
e) $\sqrt{4x-5}+6 = 0$	f) $5 \cdot \sqrt{4x-5}=20$	g) $5 - \sqrt{x-6}=2$	h) $\sqrt{4x+6}=5$
i) $\sqrt{2x +1}-1 = -6$	j) $10+\sqrt{2x-3}=5$	k) $7+\sqrt{5x+4}=10$	

Lösungen (unsortiert)
L={1} (kommt zweimal vor) L={100} L={15} $L=\{- \frac{5}{4}\}$ L={0} $L=\{\frac{21}{4}\}$
L={ }(leere Menge; Quadratwurzel darf nicht negativ sein) (kommt dreimal vor)

Aufwendigere Aufgaben zu

Wurzelgleichungen

Beispiel mit zwei gleichen Wurzeln:

Erst zusammenfassen, dann quadrieren und auflösen.

\begin{equation} \begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{x+1} -1 &= 3 \cdot \sqrt{x+1} + 3 &&| ~ - 3 \cdot \sqrt{x+1} &&| ~ + 1 \\ 2 \cdot \sqrt{x+1} &= 4 &&| ~ : 2 &&| ~ \text{quadrieren} ~~| ~- 1\\ x&= 3 \\ \text{Probe:}\\ 5 \cdot \sqrt{3+1} -1 &= 3 \cdot \sqrt{3+1} + 3 \\ 5 \cdot 2 -1 &= 3 \cdot 2 + 3 ~\Leftrightarrow~ 9 &= 9 ~~\text{wahr} ~~L&=\{ 3 \} \end{aligned} \end{equation}

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln

Erst Wurzel isolieren, dann beidseitig quadrieren und auflösen. \begin{equation} \begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{4x+10} – 4 \cdot \sqrt{2x+6} &= 0 &&|~ + 4 \cdot \sqrt{2x+6} &&|~ \text{quadrieren} \\ 9 \cdot (4x+10) &= 16 \cdot (2x+6) &&|~ \text{auflösen} \\ 36 x + 90 &= 32 x +96 &&| ~ -90 &&| ~ -32 x \\ 4x &= 6 ~~\Leftrightarrow ~ x = 1,5 \\ \text{Probe: }\\ 3 \cdot \sqrt{4\cdot 1,5+10} – 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 1,5+6} &= 3 \cdot \sqrt{ 16 } - 4 \cdot \sqrt{ 9 } &= 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 &= 0 ~~\text{wahr} ~~L=\{ 1,5 \} \end{aligned} \end{equation}

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln und absolutem Element

Wurzeln nach einander durch quadrieren auflösen. \begin{equation} \begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}-3 &= 0 &&|~+3 &&|~ -\sqrt{x-1}\\ \sqrt{x-4} &=3-\sqrt{x-1} &&|~ \text{quadrieren} \\ x-4 &= \left(3 - \sqrt{x-1} \right)^2 &&|~ \text{2. Binom anwenden mit} a = 3 \text{und} b =-\sqrt{x-1}\\ x-4 &= 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1} + (x-1) &&|~ + 6 \cdot \sqrt{x-1} &&|~ +4 ~~| ~\text{Rest fällt weg} \\ 6 \cdot \sqrt{x-1} &= 12 &&|~: 6 &&|~ \text{quadrieren} \\ x-1 &= 4 ~~\Leftrightarrow~~ x = 5 \\ \text{Probe: }\\ \sqrt{5-1} + \sqrt{5-4}-3 &= 2 + 1 - 3 = 0~~\text{wahr} ~~L=\{ 5 \} \end{aligned} \end{equation}

Aufgaben mit aufwendigeren Wurzelgleichungen:		
a) $7 \cdot \sqrt{3 x} – 1=5 \cdot \sqrt{3 x} +5$	b) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} x+1} – 1= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} x+1} +1$	c) $3 \cdot \sqrt{3x-5} – 2 = 2 \cdot \sqrt{3x-5} +2$
d) $\sqrt{ \frac{1}{3} x +7} – \sqrt{\frac{1}{2} x +6} =0$	e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+9} – \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x+14} = 0$	f) $\sqrt{3x-7} – \sqrt{4x-9} = 0$
g) $5 \cdot \sqrt{3 x - 8} – \sqrt{7 x +4 }=0$	h) $7 \cdot \sqrt{15 x + 4} – 3 \cdot \sqrt{50 -3 x } = 0$	i) $\sqrt{x+9}- \sqrt{x} = 1$

Aufgaben mit aufwendigeren Wurzelgleichungen:		
j) $\sqrt{4x-3}+ 2 \cdot \sqrt{x}=3$	k) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-3}=9$	l) $\sqrt{2(x+1)}+\sqrt{2x+15} = 13$

Lösungen (unsortiert)
L={3} L={7} L={12} x=2 L={} L={6} L={3} $L=\{\frac{1}{3}\}$ L={-5} L={16} L={1} L={19} L={17}