

Vorgehensweise: Wurzelgleichungen lösen

Zunächst muss bei einer quadratischen Gleichung \sqrt{x} von der Wurzel befreit werden. Dies geschieht mittels der Quadratur der Gleichung. Dabei erhält man aber unter Umständen eine weitere Lösung, die die ursprüngliche Gleichung eventuell nicht löst. Die **Quadratur** ist demnach **keine äquivalente Termumformung**, bei der die Definitions- und Lösungsmenge immer konstant bleibt. Trotzdem hilft sie bei der Lösungsfindung. Man muss lediglich beachten, die gefundenen Lösungen durch eine Probe zu überprüfen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x-17 && \sim \text{quadrieren} \\ (x-17)^2 &= 2x+1 && \sim \text{Binom auflösen} \\ x^2 - 34x + 289 &= 2x+1 && \sim -2x -1 \parallel 0 \\ x^2 - 36x + 288 &= 0 && \sim \text{pq-Formel} \\ x_{1,2} &= \frac{36 \pm \sqrt{\left(\frac{-36}{2}\right)^2 - 288}}{2} && \sim \text{pq-Formel} \\ &= 18 \pm \sqrt{324 - 288} && \sim \text{pq-Formel} \\ &= 18 \pm 6 && \sim \text{pq-Formel} \\ &\implies x_1 = 12 \text{ und } x_2 = 24 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= 12 \implies \sqrt{2 \cdot 12 + 1} = 12 - 17 \\ \sqrt{25} &= -5 \implies 5 = -5 \implies \text{falsch} \\ &\implies x_1 = 12 \text{ löst die ursprüngliche Gleichung nicht!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_2 &= 24 \implies \sqrt{2 \cdot 24 + 1} = 24 - 17 \\ \sqrt{49} &= 7 \implies 7 = 7 \implies \text{wahr} \\ &\implies x_2 = 24 \text{ löst die ursprüngliche Gleichung!} \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{24\}$

Musteraufgabe

$$\begin{aligned} \sqrt{x-9} &= 1 \sim \text{quadrieren} \\ x-9 &= 1 \implies x = 10 \\ \text{Probe: } \sqrt{10-9} &= 1 \implies 1 = 1 \implies \text{wahr} \end{aligned}$$

Aufgaben:			
a) $2 - \sqrt{x} = 1$	b) $\sqrt{x} - 2 = -3$	c) $\sqrt{4-x} = 2$	d) $\sqrt{x} - 8 = 2$
e) $\sqrt{4x-5} + 6 = 0$	f) $5 \cdot \sqrt{4x-5} = 20$	g) $5 - \sqrt{x-6} = 2$	h) $\sqrt{4x+6} = 5$
i) $\sqrt{2x+1} - 1 = -6$	j) $10 + \sqrt{2x-3} = 5$	k) $7 + \sqrt{5x+4} = 10$	

Lösungen (unsortiert)	
$L = \{1\}$ (kommt zweimal vor)	$L = \{100\}$ $L = \{15\}$ $L = \{-\frac{5}{4}\}$ $L = \{0\}$ $L = \{\frac{21}{4}\}$
$L = \{\}$ (leere Menge; Quadratwurzel darf nicht negativ sein) (kommt dreimal vor)	

Aufwendigere Aufgaben zu

Wurzelgleichungen

Beispiel mit zwei gleichen Wurzeln:

Erst zusammenfassen, dann quadrieren und auflösen.

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{x+1} - 1 &= 3 \cdot \sqrt{x+1} + 3 && | - 3 \cdot \sqrt{x+1} && | \sim - 3 \cdot \sqrt{x+1} && | \sim + 1 \\ 2 \cdot \sqrt{x+1} &= 4 && | : 2 && | \sim \text{\textit{quadrieren}} && | \sim \sim 1 \\ x+1 &= 4 && | - 1 && | \sim x && | \sim x = 3 \end{aligned}$$

Probe: $5 \cdot \sqrt{3+1} - 1 = 3 \cdot \sqrt{3+1} + 3$
 $5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 2 + 3$
 $9 = 9$ $\text{\textit{wahr}}$ $L = \{ 3 \}$

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln

Erst Wurzel isolieren, dann beidseitig quadrieren und auflösen.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{4x+10} - 4 \cdot \sqrt{2x+6} &= 0 && | + 4 \cdot \sqrt{2x+6} && | \sim \text{\textit{quadrieren}} \\ 9 \cdot (4x+10) &= 16 \cdot (2x+6) && | \sim \text{\textit{auflösen}} \\ 36x + 90 &= 32x + 96 && | - 90 && | \sim - 32x \\ 4x &= 6 && | : 4 && | \sim x = 1,5 \end{aligned}$$

Probe: $3 \cdot \sqrt{4 \cdot 1,5 + 10} - 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 1,5 + 6} = 3 \cdot \sqrt{16} - 4 \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$
 $\text{\textit{wahr}}$ $L = \{ 1,5 \}$

Beispiel mit unterschiedlichen Wurzeln und absolutem Element

Wurzeln nach einander durch quadrieren auflösen.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} - 3 &= 0 && | + 3 && | \sim -\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-4} &= 3 - \sqrt{x-1} && | \sim \text{\textit{quadrieren}} \\ x-4 &= \left(3 - \sqrt{x-1} \right)^2 && | \sim \text{\textit{2. Binom anwenden mit}} \ a = 3 \ \text{\textit{und}} \ b = -\sqrt{x-1} \\ x-4 &= 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1} + (x-1) && | \sim + 6 \cdot \sqrt{x-1} && | \sim + 4 \\ \sim \text{\textit{Rest fällt weg}} \\ 6 \cdot \sqrt{x-1} &= 12 && | : 6 && | \sim \text{\textit{quadrieren}} \\ x-1 &= 4 && | + 1 && | \sim x = 5 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{5-1} + \sqrt{5-4} - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$
 $\text{\textit{wahr}}$ $L = \{ 5 \}$

Aufgaben mit aufwendigeren Wurzelgleichungen:		
a) $7 \cdot \sqrt{3x} - 1 = 5 \cdot \sqrt{3x} + 5$	b) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x+1} - 1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x+1} + 1$	c) $3 \cdot \sqrt{3x-5} - 2 = 2 \cdot \sqrt{3x-5} + 2$
d) $\sqrt{\frac{1}{3}x+7} - \sqrt{\frac{1}{2}x+6} = 0$	e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+9} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x+14} = 0$	f) $\sqrt{3x-7} - \sqrt{4x-9} = 0$
g) $5 \cdot \sqrt{3x-8} - \sqrt{7x+4} = 0$	h) $7 \cdot \sqrt{15x+4} - 3 \cdot \sqrt{50-3x} = 0$	i) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1$

Aufgaben mit aufwendigeren Wurzelgleichungen:		
j) $\sqrt{4x-3} + 2 \cdot \sqrt{x} = 3$	k) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 9$	l) $\sqrt{2(x+1)} + \sqrt{2x+15} = 13$
Lösungen (unsortiert)		
$L = \{3\}$ $L = \{7\}$ $L = \{12\}$ $x = 2$ $L = \{\}$ $L = \{6\}$ $L = \{3\}$ $L = \{\frac{1}{3}\}$ $L = \{-5\}$ $L = \{16\}$ $L = \{1\}$ $L = \{19\}$ $L = \{17\}$		

From:

<https://www.kopfload.de/> - kopfload - Lad Dein Hirn auf!

Permanent link:

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:arithmetik:einfuehr_wurzeln&rev=1467320720

Last update: 2025/11/19 16:13

