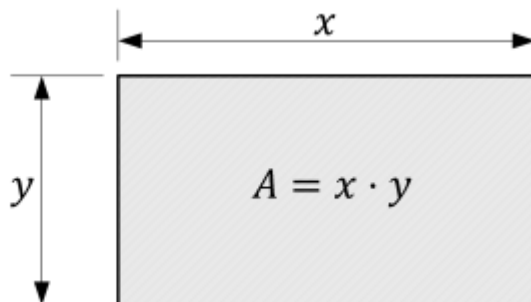


Extremwertaufgaben

Beispiel Rechteckfläche

Es soll ein rechteckiger Sandkasten gebaut werden. Der Sandkasten soll flächenmäßig so groß wie möglich werden. Zur Verfügung stehen zwei 8 m lange Bretter. Wie lang müssen die Kanten gewählt werden, damit die Grundfläche des Sandkastens maximal wird?

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Fläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu:
 $A = x \cdot y$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Es stehen zwei Bretter je 8 m zur Verfügung. Der Umfang beträgt demnach 16 m!

\Rightarrow Nebenbedingung: $2 \cdot x + 2 \cdot y = 16 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$

$$A'(x) = 8 - 2x = 0 \rightarrow x = 4$$

Hinreichende Bedingung: $A''(x) \neq 0$

$$A''(4) = -2 < 0 \rightarrow \text{Es handelt sich um ein Maximum} \checkmark$$

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von x in die Nebenbedingung kann nun noch y bestimmt werden:

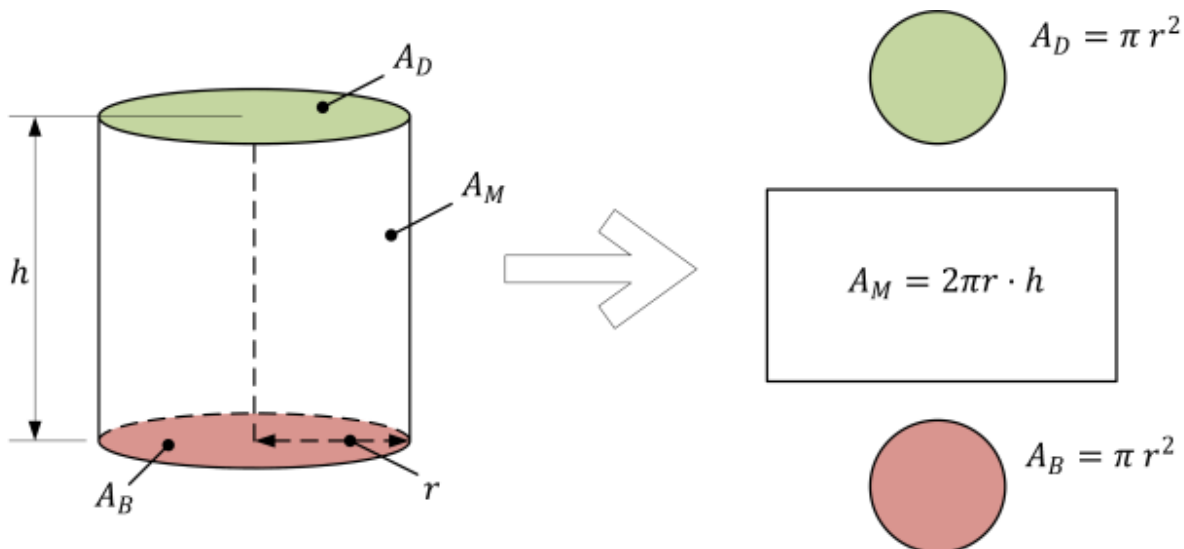
$$y = 8 - x = 8 - 4 = 4$$

Antwort: Die größte Fläche resultiert wenn als Grundfläche ein Quadrat mit den Kantenlängen $x = y = 4$ gewählt wird.

Beispiel Dosenoptimierung

Es soll Suppe mit dem Volumen $V = 800 \text{ ml}$ in einer Dose verpackt werden. Dabei soll der Blechverbrauch minimal werden. Bestimmen Sie das optimale Verhältnis zwischen Höhe h und Radius r der Dose.

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Oberfläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu: $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Das Volumen der Dose soll 800 ml betragen!

$$\rightarrow \text{Nebenbedingung: } V = 0,8 \text{ dm}^3 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\rightarrow h = \frac{0,8 \text{ dm}^3}{\pi \cdot r^2}$$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{0,8 \text{ dm}^3}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{1,6 \text{ dm}^3}{r} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 1,6 \text{ dm}^3 \cdot r^{-1}$$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(r) = 0$

$$A'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - \frac{1,6}{r^2} = 0 \rightarrow 4 \cdot \pi \cdot r = \frac{1,6}{r^2} \rightarrow r^3 = \frac{1,6}{4 \cdot \pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1,6}{4 \cdot \pi}} \approx 0,5 \text{ dm}$$

Hinreichende Bedingung: $A''(r) \neq 0$

$$A'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 1,6 \cdot r^{-2} \rightarrow A''(r) = 4 \cdot \pi + 2 \cdot 1,6 \cdot r^{-3} = 4 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1,6}{r^3}$$

$\rightarrow A''(0,5) = 4 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1,6}{0,5^3} \approx 38,2 > 0 \rightarrow$ Es handelt sich um ein Minimum \checkmark

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von r in die Nebenbedingung kann nun noch h bestimmt werden:

$$h(r) = \frac{0,8}{\pi \cdot r^2} \rightarrow h(0,5) = \frac{0,8}{\pi \cdot 0,5^2} \approx 1,02 \text{ dm}$$

Antwort: Bei einem Radius von $r = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}$ und einer Höhe von $h = 1,02 \text{ dm} = 10,2 \text{ cm}$ resultiert für eine Dose mit einem Volumen von 800 ml der minimale Materialverbrauch.

Kostenoptimierung

Die Gewinnes eines Unternehmens sollen optimiert werden. Bei einer entsprechenden Analyse konnten die Kosten K als Funktion

$$K(x) = 0,04 x^3 - 0,64 x^2 + 3,6 x + 2$$

Das Unternehmen stellt große Mengen her, daher stellt x die Menge in 10.000 Stück dar und die Kosten K sind in 10.000 € dargestellt.

Der Erlös ¹⁾ kann in Abhängigkeit der verkauften Waren x als Erlösfunktion $E(x)$ dargestellt werden:

$$E(x) = -0,16 x^2 + 2,76 x$$

a) Wie viel Stück Ware sollten produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?

b) Wie groß ist der Maximalgewinn?

c) Wie groß ist der Erlös pro Stück beim Maximalgewinn?

Lösungsskizze:

a)

- Gewinn $G(x) = E(x) - K(x)$
(Gewinn = Erlös - Kosten)
- $G'(x)$ und $G''(x)$ bestimmen
- Maximum mittels $G'(x_E) = 0$ berechnen
- Mit $G''(x)$ überprüfen
- $Menge_{\max} = x_E \cdot 10.000$ Stk
gemeint ist die Menge (Stück) an Waren

b)

- $Maximalgewinn = G(x_E) \cdot 10.000$ €
(10.000€ s. Normierung für $K(x)$)

c)

- $Gesamterlös = E(x_E) \cdot 10.000$ €
für die gesamte Menge in €
- $Stückerlös = \frac{Gesamterlös}{x_E \cdot 10.000}$
Erlös für jedes einzelne Stück

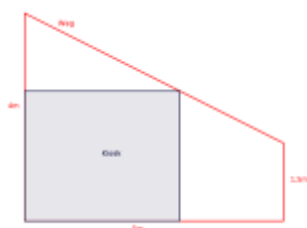
Aufgaben zu Extremwertaufgaben aus dem Buch

Die folgenden Aufgaben sind nach Themen sortiert und können im Buch „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **1. Druck 2014** gefunden werden.

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Aufgabe	192	A1	$a=5$; $b=5$; $d=7,07$
Aufgabe	192	A2	In der Aufgabenstellung muss es gleichschenkliges Dreieck heißen! $g=40$; $a=40$; $h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95$; $b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7$; $h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4$; $A_{\max}=8\text{m}^2$ ACHTUNG: Fehler in der Skizze (s.u.)
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3$; $k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$; b) $l_1=4$ (LE), $l_2=\frac{8}{3}$ (LE)
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5$; $v=2,53125$; b) $A_{\max} \approx 3,8$ (FE); ...
		A13	c) max: $u \approx 1,15$ & $v \approx 2,99$ \$;\$ min: $u \approx 2,38$ & $v=0$; ...
		A13	d) $U_{\max}=8,29$ (LE); $U_{\min}=4,76$ (LE)

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *



Korrektur Skizze: S.192 A5 (Kiosk)

Für „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **2. Druck 2015** gilt:

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423
Aufgabe	192	A1	$a=5$; $b=5$; $d=7,07$
Aufgabe	192	A2	$g=40$; $a=40$; $h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95$; $b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7$; $h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4$; $A_{\max}=8\text{m}^2$
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3$; $k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$; b) $l_1=4$ (LE), $l_2=\frac{8}{3}$ (LE)
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5$; $v=2,53125$; b) $A_{\max} \approx 3,8$ (FE); ...
	193	A13	c) max: $u \approx 1,15$ & $v \approx 2,99$ \$;\$ min: $u \approx 2,38$ & $v=0$; ...
	193	A13	d) $U_{\max}=8,29$ (LE); $U_{\min}=4,76$ (LE)

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *

Weitere Extremwertaufgaben

Weitere Aufgaben Pfeffer 7. Auflage S. 226!

¹⁾

Umsatz oder auch Einnahmen; NICHT Gewinn

From:

<https://www.kopfload.de/> - **kopfload - Lad Dein Hirn auf!**

Permanent link:

<https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:extremw:aufgaben>

Last update: **2025/11/19 16:15**

