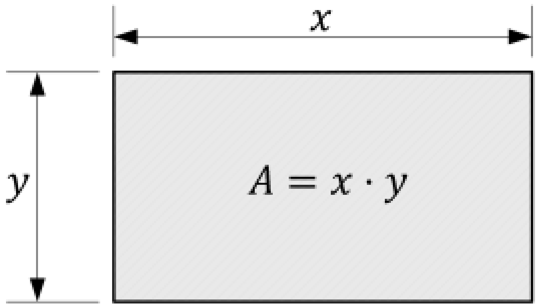
Extremwertaufgaben

Beispiel Rechteckfläche

Es soll ein rechteckiger Sandkasten gebaut werden. Der Sandkasten soll flächenmäßig so groß wie möglich werden. Zur Verfügung stehen zwei 8 m lange Bretter. Wie lang müssen die Kanten gewählt werden, damit die Grundfläche des Sandkastens maximal wird?

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Fläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu: $A=x \cdot y$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Es stehen zwei Bretter je 8 m zur Verfügung. Der Umfang beträgt demnach 16 m!

$\Rightarrow$ Nebenbedingung: $2~x+2~y=16$ $\Rightarrow$ $x+y=8$ $\Rightarrow$ $y=8-x$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$A(x)=x \cdot (8-x)=8x-x^2$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(x)=0$

$A'(x)=8-2x=0 \Rightarrow x=4$

Hinreichende Bedingung: $A''(x)\neq0$

$A''(4)=-2 <0 \Rightarrow$ Es handelt sich um ein Maximum $\checkmark$

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von x in die Nebenbedingung kann nun noch y bestimmt werden:

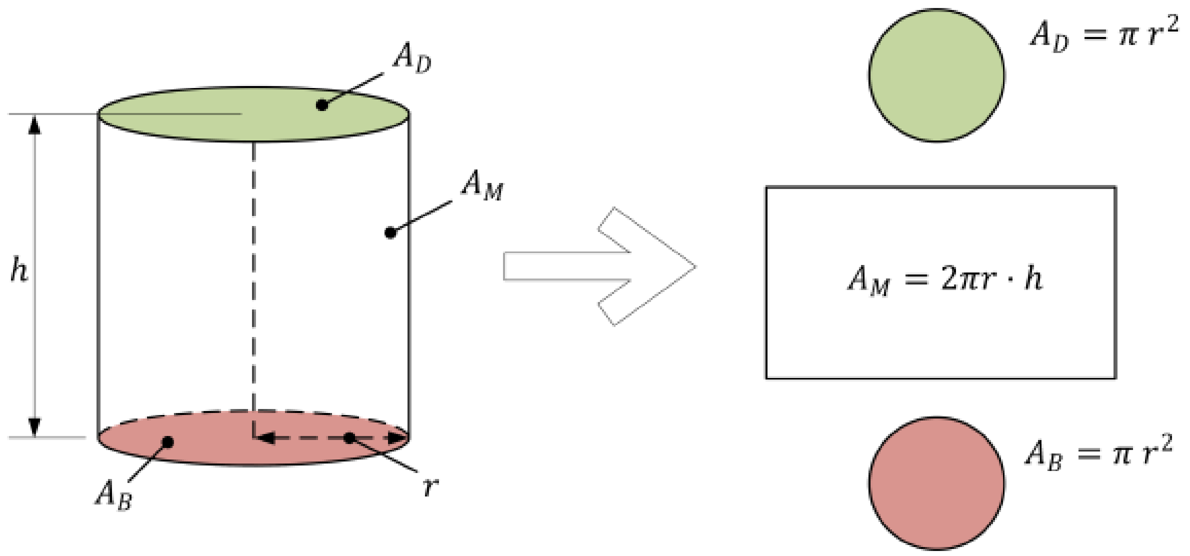
$y=8-x=8-4=4 $

Antwort: Die größte Fläche resultiert wenn als Grundfläche ein Quadrat mit den Kantenlängen $x=y=4$ gewählt wird.

Beispiel Dosenoptimierung

Es soll Suppe mit dem Volumen V = 800 ml in einer Dose verpackt werden. Dabei soll der Blechverbrauch minimal werden. Bestimmen Sie das optimale Verhältnis zwischen Höhe h und Radius r der Dose.

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Oberfläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu: $A=2 \cdot \pi ~ r^2+2 \pi~r \cdot h$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Das Volumen der Dose soll 800 ml betragen!

$\Rightarrow$ Nebenbedingung: $V=0,8~l=0,8~dm^3=\pi~ r^2 \cdot h$

$\Rightarrow$ $h=\frac{0,8~dm^3}{\pi ~r^2}$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$A=2 \cdot \pi ~ r^2+2 \pi~r \cdot \frac{0,8~dm^3}{\pi ~r^2} = 2 \cdot \pi ~ r^2+ \frac{1,6~dm^3}{r} = 2 \cdot \pi ~ r^2+ 1,6~dm^3 \cdot r^{-1}$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(r)=0$

$A'(r)=4 ~ \pi ~ r-\frac{1,6}{r^2}=0 \Rightarrow 4 ~ \pi \ r = \frac{1,6}{r^2} \Rightarrow r^3=\frac{1,6}{4~\pi} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1,6}{4~ \pi}} \approx 0,5~dm $

Hinreichende Bedingung: $A''(r)\neq0$

$A'(r)=4 ~ \pi ~ r-1,6 \cdot r^{-2} \Rightarrow A''(r)=4 ~ \pi +2 \cdot 1,6 \cdot r^{-3} =4 ~ \pi +2 \frac{1,6}{r^3}$

$\Rightarrow A''(0,5)=4 ~ \pi +2 \frac{1,6}{0,5^3} \approx 38,2 >0 \Rightarrow$ Es handelt sich um ein Minimum $\checkmark$

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von r in die Nebenbedingung kann nun noch h bestimmt werden:

$h(r)=\frac{0,8}{\pi ~r^2} \Rightarrow h(0,5)=\frac{0,8}{\pi ~0,5^2} \approx 1,02~dm $

Antwort: Bei einem Radius von $r=0,5~dm=5~cm$ und einer Höhe von $h=1,02~dm=10,2~cm$ resultiert für eine Dose mit einem Volumen von 800 ml der minimale Materialverbrauch.

Kostenoptimierung

Die Gewinnes eins Unternehmens sollen optimiert werden. Bei einer entsprechenden Analyse konnten die Kosten K als Funktion

<m> K(x)= 0,04 x^3 - 0,64 x^2 + 3,6 x + 2 </m>

Das Unternehmen stellt große Mengen her, daher stellt x die Menge in 10.000 Stück dar und die Kosten K sind in 10.000 € dargestellt.

Der Erlös [1)] kann in Abhängigkeit der verkauften Waren x als Erlösfunktion E(x) dargestellt werden:

<m> E(x)= - 0,16 x^2 + 2,76 x </m>

a) Wie viel Stück Ware sollten produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?

b) Wie groß ist der Maximalgewinn?

c) Wie groß ist der Erlös pro Stück beim Maximalgewinn?

Lösungsskizze:
a)

- Gewinn $G(x) = E(x) - K(x)$
  (Gewinn= Erlös - Kosten)
- $G'(x)$ und $G''(x)$ bestimmen
- Maximum mittels $G'(x_E)=0$ berechnen
- Mit $G''(x)$ überprüfen
- $Menge_{max}=x_E \cdot 10.000 St$
  gemeint ist die Menge (Stück) an Waren

b)

- $Maximalgewinn= G(x_E) \cdot 10.000 €$
  (10.000€ s. Normierung für K(x)

c)

- Gesamterlös$ = E(x_E) \cdot 10.000 €$
  für die gesamte Menge in €
- Stückerlös$ = \frac{Gesamterlös }{x_E \cdot 10.000}$
  Erlös für jedes einzelne Stück

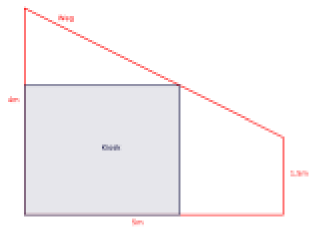
Aufgaben zu Extremwertaufgaben aus dem Buch

Die folgenden Aufgaben sind nach Themen sortiert und können im Buch „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **1. Druck 2014** gefunden werden.

Thema	**Seite**	**Aufgabe**	**Lösung**
Extremwertberechung	186f	Erklärung	
Extremwertberechung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Aufgabe	192	A1	$a=5~;~b=5~;~d=7,07$
Aufgabe	192	A2	In der Aufgabenstellung muss es gleich**schenkliges** Dreieck heißen! $g=40~;~a=40~;~h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95~;~b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7~;~h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4~;~A_{max}=8m^2$ ACHTUNG: Fehler in der Skizze (s.u.)
Aufgabe	192	A6	$x\approx 3,3~;~ k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4\|\frac{8}{3})$; b) $l_1=4~\text{LE}, ~l_2=\frac{8}{3}~\text{LE}$
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5~;~v=2,53125$; b) $A_{max} \approx 3,8~\text{FE} $; …
		A13	c) max: $u\approx 1,15~\text{&}~v \approx 2,99$ $;$ min: $u\approx 2,38~\text{&}~v=0$; …
		A13	d) $U_{max}=8,29~\text{LE}; U_{min}=4,76~\text{LE}$

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *



Korrektur Skizze: S.192 A5 (Kiosk)

Für „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **2. Druck 2015** gilt:

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechung	186f	Erklärung	
Extremwertberechung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423
Aufgabe	192	A1	$a=5~;~b=5~;~d=7,07$
Aufgabe	192	A2	$g=40~;~a=40~;~h=34,64$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95~;~b=10,95$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7~;~h=0,7$
Aufgabe	192	A5	$x=4~;~A_{max}=8m^2$
Aufgabe	192	A6	$x\approx 3,3~;~ k(3,3) \approx 103941,13$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4\|\frac{8}{3})$; b) $l_1=4~\text{LE}, ~l_2=\frac{8}{3}~\text{LE}$
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5~;~v=2,53125$; b) $A_{max} \approx 3,8~\text{FE} $; …
	193	A13	c) max: $u\approx 1,15~\text{&}~v \approx 2,99$ $;$ min: $u\approx 2,38~\text{&}~v=0$; …
	193	A13	d) $U_{max}=8,29~\text{LE}; U_{min}=4,76~\text{LE}$

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *

Weitere Extremwertaufgaben

Weitere Aufgaben Pfeffer 7. Auflage S. 226!

[1] Umsatz oder auch Einnahmen; NICHT Gewinn