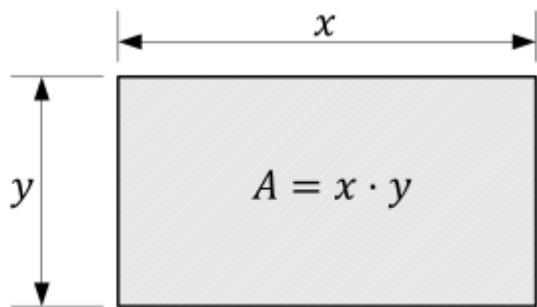


Extremwertaufgaben

Beispiel Rechteckfläche

Es soll ein rechteckiger Sandkasten gebaut werden. Der Sandkasten soll flächenmäßig so groß wie möglich werden. Zur Verfügung stehen zwei 8 m lange Bretter. Wie lang müssen die Kanten gewählt werden, damit die Grundfläche des Sandkastens maximal wird?

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Fläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu:
 $A=x \cdot y$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Es stehen zwei Bretter je 8 m zur Verfügung. Der Umfang beträgt demnach 16 m!

\Rightarrow Nebenbedingung: $2x + 2y = 16 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$

$$A'(x) = 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4$$

Hinreichende Bedingung: $A''(x) \neq 0$

$A''(4) = -2 < 0 \Rightarrow$ Es handelt sich um ein Maximum \checkmark

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von x in die Nebenbedingung kann nun noch y bestimmt werden:

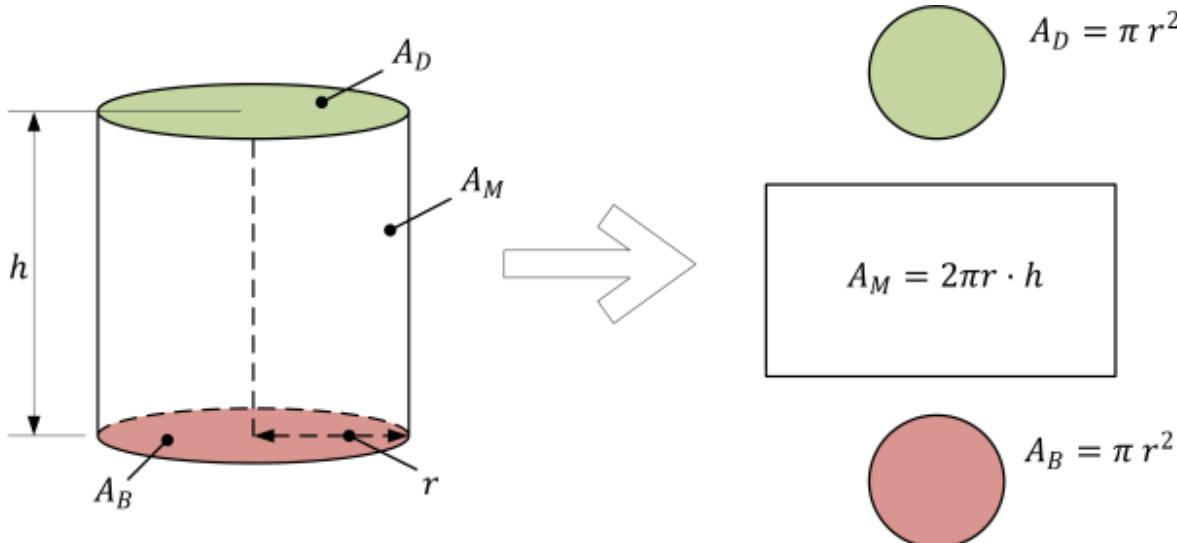
$$y = 8 - x = 8 - 4 = 4$$

Antwort: Die größte Fläche resultiert wenn als Grundfläche ein Quadrat mit den Kantenlängen $x = y = 4$ gewählt wird.

Beispiel Dosenoptimierung

Es soll Suppe mit dem Volumen $V = 800 \text{ ml}$ in einer Dose verpackt werden. Dabei soll der Blechverbrauch minimal werden. Bestimmen Sie das optimale Verhältnis zwischen Höhe h und Radius r der Dose.

1. Skizze erstellen



2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Oberfläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu: $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Das Volumen der Dose soll 800 ml betragen!

$$\Rightarrow \text{Nebenbedingung: } V = 0,8\pi r^2 h = 800 \text{ ml}$$

$$\Rightarrow h = \frac{800}{0,8\pi r^2}$$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{800}{0,8\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r} = 2\pi r^2 + 1600\pi r^{-1}$$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(r)=0$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{1600}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{1600}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{1600}{4\pi} \approx 0,5 \text{ dm}$$

Hinreichende Bedingung: $A''(r) > 0$

$$A''(r) = 4\pi + \frac{3200}{r^3} \Rightarrow A''(0,5) = 4\pi + 3200 \approx 38,2 > 0 \Rightarrow \text{Es handelt sich um ein Minimum}$$

\checkmark

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von r in die Nebenbedingung kann nun noch h bestimmt werden:

$$h(r) = \frac{800}{0,8r^2} \Rightarrow h(0,5) = \frac{800}{0,8 \cdot 0,125} \approx 1,02 \text{ dm}$$

Antwort: Bei einem Radius von $r = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}$ und einer Höhe von $h = 1,02 \text{ dm} = 10,2 \text{ cm}$ resultiert für eine Dose mit einem Volumen von 800 ml der minimale Materialverbrauch.

Kostenoptimierung

Die Gewinne eines Unternehmens sollen optimiert werden. Bei einer entsprechenden Analyse konnten die Kosten K als Funktion

$$<\text{m}> K(x) = 0,04 x^3 - 0,64 x^2 + 3,6 x + 2 </\text{m}>$$

Das Unternehmen stellt große Mengen her, daher stellt x die Menge in 10.000 Stück dar und die Kosten K sind in 10.000 € dargestellt.

Der Erlös ¹⁾ kann in Abhängigkeit der verkauften Waren x als Erlösfunktion $E(x)$ dargestellt werden:

$$<\text{m}> E(x) = -0,16 x^2 + 2,76 x </\text{m}>$$

- Wie viel Stück Ware sollten produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?
- Wie groß ist der Maximalgewinn?
- Wie groß ist der Erlös pro Stück beim Maximalgewinn?

Lösungsskizze:

a)

- Gewinn $G(x) = E(x) - K(x)$
(Gewinn = Erlös - Kosten)
- $G'(x)$ und $G''(x)$ bestimmen
- Maximum mittels $G'(x_E) = 0$ berechnen
- Mit $G''(x)$ überprüfen
- $\text{Menge}_{\text{max}} = x_E \cdot 10.000 \text{ St}$
gemeint ist die Menge (Stück) an Waren

b)

- $\text{Maximalgewinn} = G(x_E) \cdot 10.000 \text{ €}$
(10.000 € s. Normierung für $K(x)$)

c)

- Gesamterlös $= E(x_E) \cdot 10.000 \text{ €}$
für die gesamte Menge in €
- Stückerlös $= \frac{\text{Gesamterlös}}{x_E \cdot 10.000}$
Erlös für jedes einzelne Stück

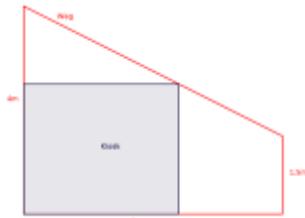
Aufgaben zu Extremwertaufgaben aus dem Buch

Die folgenden Aufgaben sind nach Themen sortiert und können im Buch „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **1. Druck 2014** gefunden werden.

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Aufgabe	192	A1	$a=5 \text{~m}; b=5 \text{~m}; d=7,07 \text{~m}$
Aufgabe	192	A2	In der Aufgabenstellung muss es gleich schenkliges Dreieck heißen! $g=40 \text{~m}; a=40 \text{~m}; h=34,64 \text{~m}$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95 \text{~m}; b=10,95 \text{~m}$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7 \text{~m}; h=0,7 \text{~m}$
Aufgabe	192	A5	$x=4 \text{~m}; A_{\max}=8 \text{~m}^2$ ACHTUNG: Fehler in der Skizze (s.u.)
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3 \text{~m}; k(3,3) \approx 103941,13 \text{~m}^2$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$; b) $l_1=4 \text{~m}; l_2=\frac{8}{3} \text{~m}$
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5 \text{~m}; v=2,53125 \text{~m}$; b) $A_{\max} \approx 3,8 \text{~m}^2$; ...
		A13	c) max: $u \approx 1,15 \text{~m} \sim v \approx 2,99 \text{~m}$; min: $u \approx 2,38 \text{~m} \sim v=0 \text{~m}$; ...
		A13	d) $U_{\max}=8,29 \text{~m}^2; U_{\min}=4,76 \text{~m}^2$

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *



Korrektur Skizze: S.192 A5 (Kiosk)

Für „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage, **2. Druck 2015** gilt:

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechnung	186f	Erklärung	
Extremwertberechnung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1, A2	siehe S. 423
Aufgabe	192	A1	$a=5 \text{~m}; b=5 \text{~m}; d=7,07 \text{~m}$
Aufgabe	192	A2	$g=40 \text{~m}; a=40 \text{~m}; h=34,64 \text{~m}$
Aufgabe	192	A3	$a=10,95 \text{~m}; b=10,95 \text{~m}$
Aufgabe	192	A4	$r=0,7 \text{~m}; h=0,7 \text{~m}$
Aufgabe	192	A5	$x=4 \text{~m}; A_{\max}=8 \text{~m}^2$
Aufgabe	192	A6	$x \approx 3,3 \text{~m}; k(3,3) \approx 103941,13 \text{~m}^2$
Aufgabe	193	A12	a) $C(4 \frac{8}{3})$; b) $l_1=4 \text{~m}; l_2=\frac{8}{3} \text{~m}$
Aufgabe	193	A13	a) $u=1,5 \text{~m}; v=2,53125 \text{~m}$; b) $A_{\max} \approx 3,8 \text{~m}^2$; ...
	193	A13	c) max: $u \approx 1,15 \text{~m} \sim v \approx 2,99 \text{~m}$; min: $u \approx 2,38 \text{~m} \sim v=0 \text{~m}$; ...
	193	A13	d) $U_{\max}=8,29 \text{~m}^2; U_{\min}=4,76 \text{~m}^2$

/* | Aufgaben | 192ff | A5 A6 A12 A13 u.a. | *

Weitere Extremwertaufgaben

Weitere Aufgaben Pfeffer 7. Auflage S. 226!

1)

Umsatz oder auch Einnahmen; NICHT Gewinn

From:

<https://www.kopfload.de/> - **kopfload - Lad Dein Hirn auf!**



Permanent link:

<https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:extremw:aufgaben>

Last update: **2025/11/19 16:15**