Extremwertaufgaben

Beispiel Dosenoptimierung

Es soll Suppe mit dem Volumen V = 800 ml in einer Dose verpackt werden. Dabei soll der Blechverbrauch minimal werden. Bestimmen Sie das optimale Verhältnis zwischen Höhe h und Radius r der Dose.

1. Skizze erstellen

skizze_dose.pdf

2. Aufstellen der Hauptbedingung/Zielfunktion

Welche Größe soll hier „optimiert“ werden? Die Oberfläche! Demnach ergibt sich die Hauptbedingung zu: $A=2 \cdot \pi ~ r^2+2 \pi~r \cdot h$

3. Aufstellen der Nebenbedingung/Randbedingung

Welche weiteren Informationen enthält die Aufgabenstellung, um Unbekannte zu eliminieren? Das Volumen der Dose soll 800 ml betragen!

$\Rightarrow$ Nebenbedingung: $V=0,8~l=0,8~dm^3=\pi~ r^2 \cdot h$

$\Rightarrow$ $h=\frac{0,8~dm^3}{\pi ~r^2}$

4. Hauptfunktion/Zielfunktion mittels Nebenbedingung/Randbedingung vereinfachen

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung führt zu:

$A=2 \cdot \pi ~ r^2+2 \pi~r \cdot \frac{0,8~dm^3}{\pi ~r^2} = 2 \cdot \pi ~ r^2+ \frac{1,6~dm^3}{r} = 2 \cdot \pi ~ r^2+ 1,6~dm^3 \cdot r^{-1}$

5. Extremum (Optimum) ermitteln

Notwendige Bedingung: $A'(r)=0$

$A'(r)=4 ~ \pi ~ r-\frac{1,6}{r^2}=0 \Rightarrow 4 ~ \pi \ r = \frac{1,6}{r^2} \Rightarrow r^3=\frac{1,6}{4~\pi} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1,6}{4~ \pi}} \approx 0,5~dm $

Hinreichende Bedingung: $A''(r)\neq0$

$A'(r)=4 ~ \pi ~ r-1,6 \cdot r^{-2} \Rightarrow A''(r)=4 ~ \pi +2 \cdot 1,6 \cdot r^{-3} =4 ~ \pi +2 \frac{1,6}{r^3}$

$\Rightarrow A''(0,5)=4 ~ \pi +2 \frac{1,6}{0,5^3} \approx 38,2 >0 \Rightarrow$ Es handelt sich um ein Minimum $\checkmark$

6. Lösung ermitteln

Durch einsetzen von r in die Nebenbedingung kann nun noch h bestimmt werden:

$h(r)=\frac{0,8}{\pi ~r^2} \Rightarrow h(0,5)=\frac{0,8}{\pi ~0,5^2} \approx 1,02~dm $

Antwort: Bei einem Radius von $r=0,5~dm=5~cm$ und einer Höhe von $h=1,02~dm=10,2~cm$ resultiert für eine Dose mit einem Volumen von 800 ml der minimale Materialverbrauch.

Kostenoptimierung

Die Gewinnes eins Unternehmens sollen optimiert werden. Bei einer entsprechenden Analyse konnten die Kosten K als Funktion

<m> K(x)= 0,04 x^3 - 0,64 x^2 + 3,6 x + 2 </m>

Das Unternehmen stellt große Mengen her, daher stellt x die Menge in 10.000 Stück dar und die Kosten K sind in 10.000 € dargestellt.

Der Erlös [1)] kann in Abhängigkeit der verkauften Waren x als Erlösfunktion E(x) dargestellt werden:

<m> E(x)= - 0,16 x^2 + 2,76 x </m>

a) Wie viel Stück Ware sollten produziert werden, damit der Gewinn maximal wird?

b) Wie groß ist der Gesamtgewinn?

c) Wie groß ist der Erlös pro Stück?

Aufgaben zu Extremwertaufgaben aus dem Buch

Die folgenden Aufgaben sind nach Themen sortiert und können im Buch „Mathematik Technik Fachhochschulreife“ Cornelsen Verlag 1. Auflage 2014 gefunden werden.

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Extremwertberechung	186f	Erklärung	
Extremwertberechung Vorgehensweise	189	Erklärung	
Aufgaben	190	A1 A2	siehe S.423

Thema	Seite	Aufgabe	Lösung
Aufgaben	192ff	A5 A6 A12 A13 u.a.	

Weitere Extremwertaufgaben

Weitere Aufgaben Pfeffer 7. Auflage S. 226!

[1] Umsatz oder auch Einnahmen; NICHT Gewinn