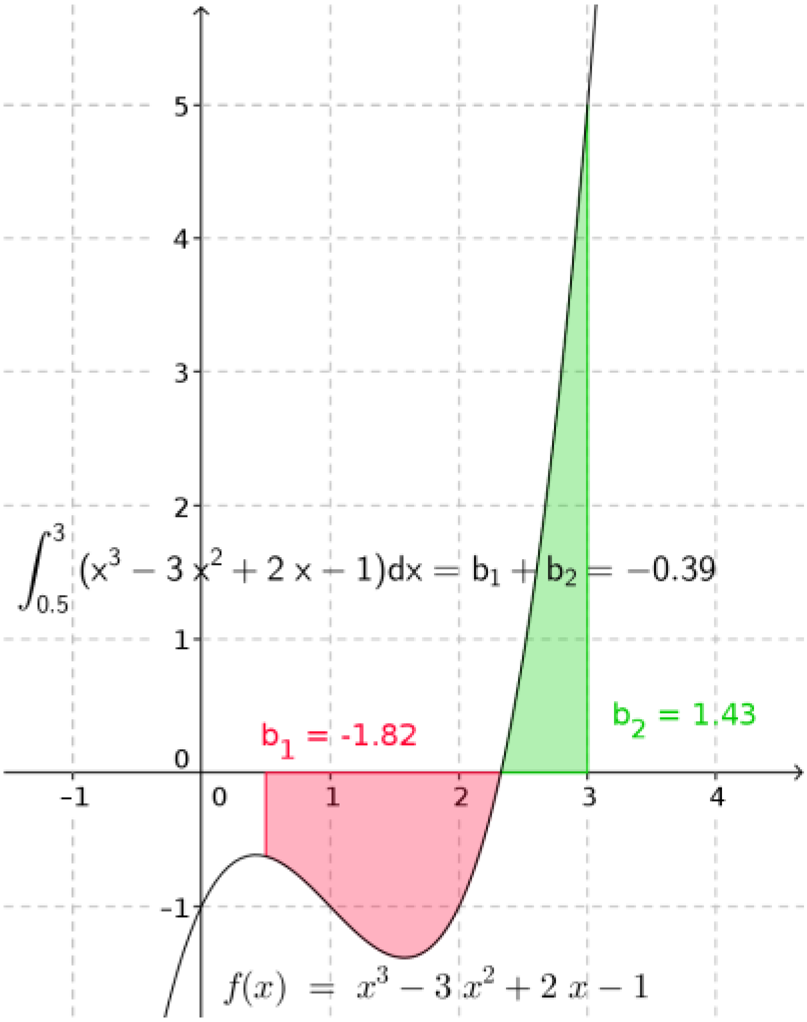
Bestimmtes Integral

Ein bestimmtes Integral ermittelt aus dem beiden Teilflächen, die von einer Funktion f(x) und der x-Achse eingeschlossen werden, den Flächeninhalt zwischen zwei Grenzen a und b.

Skizze:



Die Funktion lautet <m>f(x) =x^3 - 2 x^2 + 2 x- 1</m> und die Integralgrenzen wurde zu a=0,5 und b=3 festgelegt.

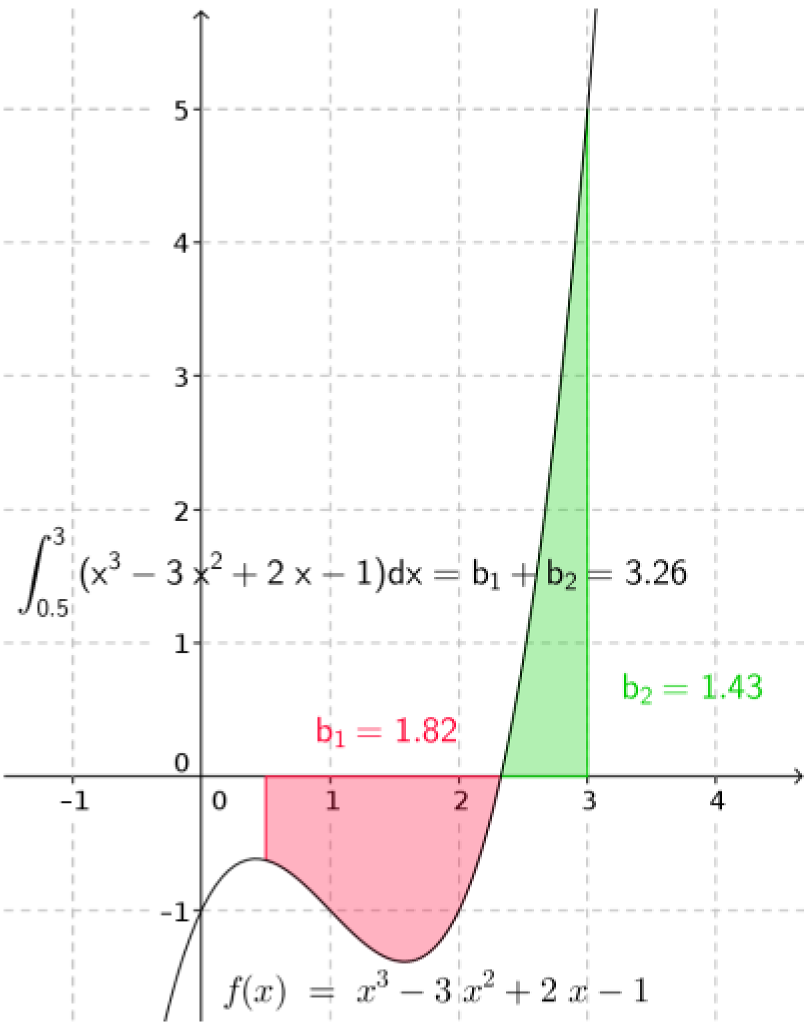
Die linke (rote) Fläche liegt unterhalb der x-Achse und liefert daher einen negativen Flächenbeitrag. Die rechte (grüne) Fläche liefert liegt oberhalb der x-Achse und liefert daher einen positiven Flächenbeitrag. Zusammen ergibt sich ein negativer Wert, da die rote Fläche größer ist als die grüne.

Man kann dies auch mit einer „Gewinn/Verlust“-Rechnung als Ananlogie gleichsetzen. Dabei wäre die rote Fläche der Verlust und die grüne Fläche der Gewinn. Das Integral liefert als den Gesamtverlust/-gewinn. Hier: Gesamtverlust in Höhe von -0,39 FE. Die innerhalb des Integrals liegende Nullstelle spielt bei der Berechnung keine Rolle.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + C$$
$$\int_{0,5}^{3} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{0,5}^{3} = F(3) - F(0,5) = -0,75 - (-0,36) = -0,39$$
$$\text{Vgl.: } b_1 + b_2 = -1,82 + 1,43 = -0,39$$

Flächenberechnung mittels Integral

Wird im gleichen Bespiel nach der eingeschlossenen Fläche zwischen f(x) und der x-Achse gefragt, so ist nach den absoluten (positiven) Flächen gefragt. In diesem Fall müssen die einzelnen Flächen (hier: <m>b_1</m> und <m>b_2</m>) als positive Werte ermittelt und aufaddiert werden.



Die Rechnung dazu sieht ähnlich aus. Hinweis: Die Nullstelle wurde mittels Geogebra ermittelt. Hier kommen die bekannten Verfahren zum Einsatz (Probe, Horner-Schema, Polynom-Division, pq-Formel)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + C$$

ermittelte Nullstelle: $x_N = 2{,}32$

$$[A] = \left|\int_{0,5}^{3} f(x) \cdot dx\right| = \left|[F(x)]\right|_{0,5}^{3} = \left|[F(x)]\right|_{0,5}^{2,32} + \left|[F(x)]\right|_{2,32}^{3}$$

$$= |F(2{,}32) - F(0{,}5)| + |F(3) - F(2{,}32)|$$

$$= |-2{,}18 - (-0{,}36)| + |-0{,}75 + (-2{,}18)| \approx 3{,}26$$

Vgl.: $b_1 + b_2 = 1{,}82 + 1{,}43 \approx 3{,}26$