Integralrechnung

Vorgehensweise zu Integralrechnung

Im folgenden Dokument werden Vorgehensweisen zu einigen Integralaufgaben aufgeführt:
Vorgehensweise für Integralrechnung

Unbestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $F(x)$ (Stammfunktion; reine Integration keine Grenzen) $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$

Bestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: Integral im Intervall $[a, b]$

Flächen werden miteinander verrechnet $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b)- F(a)$(vgl. Gewinn-Verlust-Rechnung in einem Zeitabschnitt)

Bestimmung der Stammfunktion durch Punkt

Geg.: f(x) und ein Punkt P Ges.: F(x) mit eindeutigem C Bestimmen Sie die Stammfunktion F(x), die durch den Punkt P verläuft. 1. Allgemeine Stammfunktion ermitteln (mit C). 2. Einsetzen der Punkt Koordinaten, wenn

Flächenberechnung (allgemein)

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $[A]_a^b = | \int_a^b f(x) \cdot dx |$

1. Ermitteln der Nullstellen, um die Teilflächen zu ermitteln. Nullstellen: $x_{N1}, x_{N2}, ...$
2. Überprüfen, welche Nullstellen in das Integrationsintervall fallen. z.B.: x_{N2} und x_{N3} fallen in das Integrationsintervall
3. Gesamtes Integral entsprechend der unter 2. ermittelten Nullstellen in Teilflächen unterteilen.
4. Stammfunktion ermitteln.
5. Integral über Stammfunktion (mit Beträgen) berechnen. $[A]_a^b = | \int_{a}^{b} {f(x) \cdot dx} |$ $=| \int_{a}^{x_{N2}} f(x) \cdot dx | + | \int_{x_{N2}}^{x_{N3}} f(x) \cdot dx |$ $+ |

\int_{x_{N3}}^{b} f(x) \cdot dx |$ $=| F(x_{N2}) - F(a) | + | F(x_{N3}) - F(x_{N2}) | + | F(b) - F(x_{N3}) |$

Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $[A]_a^b$

1. Differenzfunktion $h(x)$ bilden.
2. Nullstellen der Differenzfunktion $h(x)$ ermitteln (diese entsprechen den Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$).
3. Fläche, die von der Differenzfunktion $h(x)$ eingeschlossen wird (von Nullstelle zu Nullstelle), berechnen.

Integralrechnung - Berechnung einer unbekannten Grenze

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$, a und A

Gesucht ist: b $\int_a^b f(x) \cdot dx |$

Bestimmen Sie die Grenze b so, dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche A einem gegebenen Flächenwert entspricht!

1. Integral ggf. aufteilen, wenn Nullstellen vorhanden sind.
2. Gleichsetzen mit gegebener Fläche $|F(b) – F(a) | = A$, da $F(a)$ ein Zahlenwert ist (a ist gegeben), kann nach b aufgelöst werden.
3. Bei mehreren Lösungen für b (z.B. bei $b^2 = A - a^2$) muss noch eine Plausibilitätsprüfung durchgeführt werden, welcher der Zahlenwerte die gesuchte Lösung darstellt.

Aufgabensammlung

Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral

Bestimmen Sie die Stammfunktion / das unbestimmte Integral zu den gegebenen Funktionen:

a) $f_1(x)=\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2} x^2$	**b) $f_2(x)=\frac{3}{x^2}+ \frac{2}{3} x^4 - 3x +7$**
c) $f_3(x)=\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x -1$	d) $f_4(x)=\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{x^2} -3$

Bestimmtes Integral

Bestimmen Sie das bestimmte Integral zwischen -1 und 3 der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x)=-0.5 x^3 + 2 x^2 -4$	**b) $f_2(x)=-x^3 +3x^2-2$**
c) $\int_{-1}{2}(x^2-3x) \cdot dx$	d) $\int_{-2}{4}(- \frac{1}{4} x^3- 2x^2) \cdot dx$

Flächenberechnung (allgemein)

Bestimmen Sie die Fläche A, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} x -1$ eingeschlossen wird.

Integrationskonstante C

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an, sodass die Graphen der Stammfunktionen jeweils durch den Punkt $P(1 | 0)$ verlaufen.

a) $f_1(x)=\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{7} x^2 +x -1$	b) $f_2(x)=\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2} x^4 + 2 x - 3$

Schnittfläche

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und ermitteln Sie die durch die Graphen der beiden Funktionen begrenzte Fläche A.

$f(x)= -x^3 +3$	$g(x)= -4x^3 + 4x +2$

(**HINWEIS:** Häufig wird hier noch eine Skizze verlangt, nachdem die notwendigen Punkte ermittelt wurden. Bei diesen beiden Funktionen ist dies nicht möglich, da die Nullstellen von f(x) und g(x) nicht ganzzahlig sind.)

Lösungen zu folgenden Aufgaben (Pfeffer 7.Auflage)

- S. 237 A6.2 c)
- S. 242 A6.12 d)
- S. 242 A6.10 a)
- S. 243 A6.14 e)
- S. 247 A6.27 a) Winkelhalbierende f(x)=x

Lösungen mit Geogebra