Integralrechnung - Aufgaben

Unbestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $F(x)$ (Stammfunktion; reine Integration keine Grenzen) $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$

Bestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: Integral im Intervall $[a, b]$

Flächen werden miteinander verrechnet $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b)- F(a)$(vgl. Gewinn-Verlust-Rechnung in einem Zeitabschnitt)

Bestimmung der Stammfunktion durch Punkt

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$ und ein Punkt P

Gesucht ist: $F(x)$ mit eindeutigem C

Bestimmen Sie die Stammfunktion F(x), die durch den Punkt P verläuft.

1. Allgemeine Stammfunktion ermitteln (mit C).
2. Einsetzen der Punkt Koordinaten $F(x_p)+C=y_p$, wenn $P(x_p \vert y_p)$

Flächenberechnung (allgemein)

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $[A]_a^b = | \int_a^b f(x) \cdot dx |$

1. Ermitteln der Nullstellen, um die Teilflächen zu ermitteln. Nullstellen: $x_{N1}, x_{N2}, ...$
2. Überprüfen, welche Nullstellen in das Integrationsintervall fallen. z.B.: x_{N2} und x_{N3} fallen in das Integrationsintervall
3. Gesamtes Integral entsprechend der unter 2. ermittelten Nullstellen in Teilflächen unterteilen.
4. Stammfunktion ermitteln.
5. Integral über Stammfunktion (mit Beträgen) berechnen. $[A]_a^b = | \int_{a}^{b} {f(x) \cdot dx} |$ $=| \int_{a}^{x_{N2}} f(x) \cdot dx | + | \int_{x_{N2}}^{x_{N3}} f(x) \cdot dx |$ $+ | \int_{x_{N3}}^{b} f(x) \cdot dx |$ $=| F(x_{N2}) - F(a) | + | F(x_{N3}) - F(x_{N2}) | + | F(b) - F(x_{N3}) |$

Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $[A]_a^b$

1. Differenzfunktion $h(x)$ bilden.
2. Nullstellen der Differenzfunktion $h(x)$ ermitteln (diese entsprechen den Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$).
3. Fläche, die von der Differenzfunktion $h(x)$ eingeschlossen wird (von Nullstelle zu Nullstelle), berechnen.

(**HINWEIS:** Häufig wird bei Schnittflächen noch eine Skizze verlangt, nachdem die notwendigen Punkte ermittelt wurden. Bei diesen beiden Funktionen ist dies nicht möglich, da die Nullstellen von $f(x)$ und $g(x)$ nicht ganzzahlig sind.)

Integralrechnung - Berechnung einer unbekannten Grenze

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$, a und A

Gesucht ist: b bei $\int_a^b f(x) \cdot dx$

Bestimmen Sie die Grenze b so, dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche A einem gegebenen Flächenwert entspricht!

1. Integral ggf. aufteilen, wenn Nullstellen vorhanden sind.
2. Gleichsetzen mit gegebener Fläche $|F(b) - F(a) | = A$, da $F(a)$ ein Zahlenwert ist (a ist gegeben), kann nach b aufgelöst werden.
3. Bei mehreren Lösungen für b (z.B. bei $b^2 = A - a^2$) muss noch eine Plausibilitätsprüfung durchgeführt werden, welcher der Zahlenwerte die gesuchte Lösung darstellt.

Aufgabensammlung

Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral

Bestimmen Sie die Stammfunktion / das unbestimmte Integral zu den gegebenen Funktionen:

a) $f_1(x)=\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2} x^2$	**b) $f_2(x)=\frac{3}{x^2}+ \frac{2}{3} x^4 - 3x +7$**
c) $f_3(x)=\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x -1$	d) $f_4(x)=\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{x^2} -3$

Bestimmtes Integral

Bestimmen Sie das bestimmte Integral zwischen -1 und 3 der folgenden Funktionen sofern keine anderen Grenzen angegeben wurden:

a) $f_1(x)=-0.5 x^3 + 2 x^2 -4$	**b) $f_2(x)=-x^3 +3x^2-2$**
c) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x) \cdot dx$	d) $\int_{-2}^{4}(- \frac{1}{4} x^3- 2x^2) \cdot dx$

Stammfunktion durch einen Punkt

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an, sodass die Graphen der Stammfunktionen jeweils durch den Punkt $P(1 | 0)$ verlaufen.

a) $f_1(x)=\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{7} x^2 +x -1$	**b) $f_2(x)=\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2} x^4 + 2 x - 3$**
c) $f_3(x)=\frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3} x -2$	

Flächenberechnung (allgemein)

1. Bestimmen Sie die Fläche A, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} x -1$ eingeschlossen wird.
2. Bestimmen Sie die Fläche A im Intervall $[-2,2]$, die von der x-Achse, dem Funktionsgraphen von $f(x)=\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ eingeschlossen wird.

Schnittfläche

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und ermitteln Sie die durch die Graphen der beiden Funktionen $f(x)= -x^3 +3$ und $g(x)= -4x^3 + 4x +2$ begrenzte Fläche A.

Lösungen (nicht sortiert)

$F(x)=-\frac{3}{x}+ \frac{2}{15} x^5 - \frac{3}{2}x^2 +7x+C$	**$F(x)=\frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 -x+C$**
$F(x)=\frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{x} -3x +C$	$F(x)= \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{6} x^3+C$

$A=-63$	$A=0$	$C=1,883$	$C=0,512$	$C=2,233$	$A=-\frac{3}{2}$	$A=-7\frac{1}{3}$

$C=1,883$	$C=0,512$	$C=2,233$

$A=0,6438+2,3292=2,973$	$A=2,673 +0,378=3,051$	$A=4,666 +0,089+ 0,756=5,511$

Aufgabensammlung

Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral

Bestimmen Sie die Stammfunktion / das unbestimmte Integral zu den gegebenen Funktionen:

a) $f_1(x)=\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2} x^2$	**b) $f_2(x)=\frac{3}{x^2}+ \frac{2}{3} x^4 - 3x +7$**
c) $f_3(x)=\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x -1$	d) $f_4(x)=\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{x^2} -3$

Bestimmtes Integral

Bestimmen Sie das bestimmte Integral zwischen -1 und 3 der folgenden Funktionen sofern keine anderen Grenzen angegeben wurden:

a) $f_1(x)=-0.5 x^3 + 2 x^2 -4$	**b) $f_2(x)=-x^3 +3x^2-2$**
c) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x) \cdot dx$	d) $\int_{-2}^{4}(- \frac{1}{4} x^3- 2x^2) \cdot dx$

Stammfunktion durch einen Punkt

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an, sodass die Graphen der Stammfunktionen jeweils durch den Punkt $P(1 | 0)$ verlaufen.

a) $f_1(x)=\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{7} x^2 +x -1$	**b) $f_2(x)=\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2} x^4 + 2 x - 3$**
c) $f_3(x)=\frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3} x -2$	

Flächenberechnung (allgemein)

1. Bestimmen Sie die Fläche A, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} x -1$ eingeschlossen wird.
2. Bestimmen Sie die Fläche A im Intervall $[-2,2]$, die von der x-Achse, dem Funktionsgraphen von $f(x)=\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ eingeschlossen wird.

Schnittfläche

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und ermitteln Sie die durch die Graphen der beiden Funktionen $f(x)= -x^3 +3$ und $g(x)= -4x^3 + 4x +2$ begrenzte Fläche A.

Lösungen (nicht sortiert)

$F(x)=-\frac{3}{x}+ \frac{2}{15} x^5 - \frac{3}{2}x^2 +7x+C$	$F(x)=\frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 -x+C$
$F(x)=\frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{x} -3x +C$	$F(x)= \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{6} x^3+C$

$A=-63$	$A=0$	$C=1,883$	$C=0,512$	$C=2,233$	$A=-\frac{3}{2}$	$A=-7\frac{1}{3}$

$C=1,883$	$C=0,512$	$C=2,233$

$A=0,6438+2,3292=2,973$	$A=2,673 +0,378=3,051$	$A=4,666 +0,089+ 0,756=5,511$