Integralrechnung - Aufgaben

Unbestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: f(x)

Gesucht ist: F(x) (Stammfunktion; reine Integration keine Grenzen) $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$

Bestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: f(x)

Gesucht ist: Integral im Intervall \$[a, b]\$

Flächen werden miteinander verrechnet $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a) \cdot Gewinn-Verlust-Rechnung in einem Zeitabschnitt)$

Bestimmung der Stammfunktion durch Punkt

Gegeben ist eine Funktion: f(x) und ein Punkt P

Gesucht ist: \$F(x)\$ mit eindeutigem \$C\$

Bestimmen Sie die Stammfunktion F(x), die durch den Punkt P verläuft.

- 1. Allgemeine Stammfunktion ermitteln (mit C).
- 2. Einsetzen der Punkt Koordinaten F(x p)+C=y p, wenn $P(x p \mid p)$

Flächenberechnung (allgemein)

Gegeben ist eine Funktion: f(x)

Gesucht ist: $f(x) = \int \int dx dx dx$

- 1. Ermitteln der Nullstellen, um die Teilflächen zu ermitteln. Nullstellen: \$x {N1}, x {N2}, ...\$
- 2. Überprüfen, welche Nullstellen in das Integrationsintervall fallen. z.B.: \$x_{N2}\$ und \$x_{N3}\$ fallen in das Integrationsintervall
- 3. Gesamtes Integral entsprechend der unter 2. ermittelten Nullstellen in Teilflächen unterteilen.
- 4. Stammfunktion ermitteln.
- 5. Integral über Stammfunktion (mit Beträgen) berechnen. $[A]_a^b = | \int_{a}^{b} {f(x) \cdot dx} |$ \$ = | \int\\limits_{a}^{x_{N2}} f(x) \cdot dx | + | \int\\limits_{x_{N2}}^{x_{N3}} f(x) \cdot dx | \$ + | \int\\limits_{x_{N2}}^{x_{N3}}^{b} f(x) \cdot dx | \$ = | F(x_{N2}) F(a) | + | F(x_{N3}) F(x_{N2}) | + | F(b) F(x_{N3}) |

Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen: f(x) und g(x)

Gesucht ist: \$[A] a^b\$

- 1. Differenz funktion h(x)=f(x) g(x) bilden.
- 2. Nullstellen der Differenzfunktion $h(x_N)=0$ ermitteln (diese entsprechen den Schnittstellen von f(x) und g(x)).
- 3. Fläche, die von der Differenzfunktion \$h(x)\$ eingeschlossen wird (von Nullstelle zu Nullstelle), berechnen. Falls vorgegeben müssen hier noch zusätzliche Intervallgrenzen berücksichtigt werden. \$[A]_a^b = | \int\limits_{a}^{b} {h(x) \cdot dx} | \$ = | \int\limits_{a}^{x_{N2}} h(x) \cdot dx | + | \int\limits_{x_{N2}}^{x_{N3}} h(x) \cdot dx | \$ + | \int\limits_{x_{N3}}^{b} h(x) \cdot dx | \$ \$ = | H(x {N2}) H(a) | + | H(x {N3}) H(x {N2}) | + | H(b) H(x {N3}) | \$

(**HINWEIS:** Häufig wird bei Schnittflächen noch eine Skizze verlangt, nachdem die notwendigen Punkte ermittelt wurden. Bei diesen beiden Funktionen ist dies nicht möglich, da die Nullstellen von f(x) und g(x) nicht ganzzahlig sind.)

Integralrechnung - Berechnung einer unbekannten Grenze

Gegeben ist eine Funktion: f(x), a und A

Gesucht ist: \$b\$ bei \$\int\limits a^b f(x) \cdot dx\$

Bestimmen Sie die Grenze \$b\$ so, dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche \$A\$ einem gegebenen Flächenwert entspricht!

- 1. Integral ggf. aufteilen, wenn Nullstellen vorhanden sind.
- 2. Gleichsetzen mit gegebener Fläche |F(b) F(a)| = A, da F(a) ein Zahlenwert ist (a ist gegeben), kann nach b aufgelöst werden.
- 3. Bei mehreren Lösungen für b (z.B. bei $b^2 = A a^2$) muss noch eine Plausibilitätsprüfung durchgeführt werden, welcher der Zahlenwerte die gesuchte Lösung darstellt.

Aufgabensammlung

Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral

Bestimmen Sie die Stammfunktion / das unbestimmte Integral zu den gegebenen Funktionen:

a) \$f_1(x)=\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2} x^2\$	b) $f_2(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{2}{3} x^4 - 3x + 7$
c) $f_3(x)=\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	d) $f_4(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{x^2} -3$

https://www.kopfload.de/ Printed on 2025/11/30 22:31

Bestimmtes Integral

Bestimmen Sie das bestimmte Integral zwischen -1 und 3 der folgenden Funktionen sofern keine anderen Grenzen angegeben wurden:

a) $f_1(x)=-0.5 x^3 + 2 x^2 - 4$	b) \$f_2(x)=-x^3 +3x^2-2\$
c) \$\int\limits_{-1}^{2}(x^2-3x) \cdot dx\$	d) \$\int\limits_{-2}^{4}(- \frac{1}{4} x^3- 2x^2) \cdot dx\$

Stammfunktion durch einen Punkt

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an, sodass die Graphen der Stammfunktionen jeweils durch den Punkt $P(1 \mid 0)$ verlaufen.

	b) \$f_2(x)=\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2} x^4 + 2 x - 3\$
c) $f_3(x)=\frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$	

Flächenberechnung (allgemein)

- 1. Bestimmen Sie die Fläche 4, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \frac{3}{2}x 1$ eingeschlossen wird.
- 2. Bestimmen Sie die Fläche 4 im Intervall -2,2, die von der x-Achse, dem Funktionsgraphen von $f(x)=\frac{2}{3}x^3 \frac{3}{4}x^2$ eingeschlossen wird.

Schnittfläche

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und ermitteln Sie die durch die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = -x^3 + 3$ und $g(x) = -4x^3 + 4x + 2$ begrenzte Fläche A.

Integralrechnung - Berechnung einer unbekannten Grenze

Bestimmen Sie die Integrationsgrenze \$b\$ für die folgenden Integrale.

```
\infty_{0}^{b}(-2x+1) \cdot dx = -6$

\infty_{-1}^{b}(3x^2-1) \cdot dx = 4$

\infty_{1}^{b}(4x^3-6x) \cdot dx = 6$

\infty_{0}^{b}(4x^3-6x) \cdot dx = 6$
```

 $\left(x^2 - 2x + 1 \right) dx = \frac{8}{3}$

 $\int_{b}^{b+2}(x^3 + x)\cdot dx = 24$

Lösungen (nicht sortiert)

\$F(x)=-\frac{3}{x}+ \frac{2}{15} x^5 - \frac{3}{2}x^2 +7x+C\$	$F(x)=\frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 -x+C$	
$F(x)=\frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{x} -3x +C$	$F(x) = \frac{3}{5} \sqrt{3}{x^5} - \frac{1}{6}$ $x^3 + C$	
\$A=-63\$ \$A=0\$ \$C=1,883\$ \$C=0,512\$ \$C=2,233	3\$ \$A=-\frac{3}{2}\$ \$A=-7\frac{1}{3}\$	
\$C=1,883\$ \$C=0,512\$ \$C=2,233\$		
\$A=0,6438+2,3292=2,973\$ \$A=2,673 +0,378=3	,051\$ \$A=4,666 +0,089+ 0,756=5,511\$	

https://www.kopfload.de/ - kopfload - Lad Dein Hirn auf!

Permanent link:

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem_integral_aufg&rev=1530777890

Last update: 2025/11/19 16:13



https://www.kopfload.de/ Printed on 2025/11/30 22:31