

# Integralrechnung - Aufgaben

Arbeitsauftrag

## Unbestimmtes Integral

**Gegeben ist eine Funktion:**  $f(x)$

**Gesucht ist:**  $F(x)$  (Stammfunktion; reine Integration keine Grenzen)  $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$

## Bestimmtes Integral

**Gegeben ist eine Funktion:**  $f(x)$

**Gesucht ist:** Integral im Intervall  $[a, b]$

Flächen werden miteinander verrechnet  $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$  (vgl. Gewinn-Verlust-Rechnung in einem Zeitabschnitt)

## Bestimmung der Stammfunktion durch Punkt

**Gegeben ist eine Funktion:**  $f(x)$  und ein Punkt P

**Gesucht ist:**  $F(x)$  mit eindeutigem  $C$

Bestimmen Sie die Stammfunktion  $F(x)$ , die durch den Punkt P verläuft.

1. Allgemeine Stammfunktion ermitteln (mit C).
2. Einsetzen der Punkt Koordinaten  $F(x_p) + C = y_p$ , wenn  $P(x_p \mid y_p)$

## Flächenberechnung (allgemein)

**Gegeben ist eine Funktion:**  $f(x)$

**Gesucht ist:**  $[A]_a^b = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|$

1. Ermitteln der Nullstellen, um die Teilflächen zu ermitteln. Nullstellen:  $x_{N1}, x_{N2}, \dots$
2. Überprüfen, welche Nullstellen in das Integrationsintervall fallen. z.B.:  $x_{N2}$  und  $x_{N3}$  fallen in das Integrationsintervall
3. Gesamtes Integral entsprechend der unter 2. ermittelten Nullstellen in Teilflächen unterteilen.
4. Stammfunktion ermitteln.
5. Integral über Stammfunktion (mit Beträgen) berechnen.  $[A]_a^b = \left| \int_a^{x_{N2}} f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_{x_{N2}}^{x_{N3}} f(x) \cdot dx \right|$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^{x_2} f(x) \cdot dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) \cdot dx + \int_{x_3}^b f(x) \cdot dx = F(x_2) - F(a) + F(x_3) - F(x_2) + F(b) - F(x_3)$$

## Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen

**Gegeben sind zwei Funktionen:**  $f(x)$  und  $g(x)$

**Gesucht ist:**  $A_{a^b}$

1. Differenzfunktion  $h(x) = f(x) - g(x)$  bilden.
2. Nullstellen der Differenzfunktion  $h(x_N) = 0$  ermitteln (diese entsprechen den Schnittstellen von  $f(x)$  und  $g(x)$ ).
3. Fläche, die von der Differenzfunktion  $h(x)$  eingeschlossen wird (von Nullstelle zu Nullstelle), berechnen. Falls vorgegeben müssen hier noch zusätzliche Intervallgrenzen berücksichtigt werden.  
 $A_{a^b} = \int_a^{x_2} h(x) \cdot dx + \int_{x_2}^{x_3} h(x) \cdot dx + \int_{x_3}^b h(x) \cdot dx = H(x_2) - H(a) + H(x_3) - H(x_2) + H(b) - H(x_3)$

**(HINWEIS:** Häufig wird bei Schnittflächen noch eine Skizze verlangt, nachdem die notwendigen Punkte ermittelt wurden. Bei diesen beiden Funktionen ist dies nicht möglich, da die Nullstellen von  $f(x)$  und  $g(x)$  nicht ganzzahlig sind.)

## Integralrechnung - Berechnung einer unbekanntem Grenze

**Gegeben ist eine Funktion:**  $f(x)$ ,  $a$  und  $A$

**Gesucht ist:**  $b$  bei  $\int_a^b f(x) \cdot dx = A$

Bestimmen Sie die Grenze  $b$  so, dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche  $A$  einem gegebenen Flächenwert entspricht!

1. Integral ggf. aufteilen, wenn Nullstellen vorhanden sind.
2. Gleichsetzen mit gegebener Fläche  $|F(b) - F(a)| = A$ , da  $F(a)$  ein Zahlenwert ist ( $a$  ist gegeben), kann nach  $b$  aufgelöst werden.
3. Bei mehreren Lösungen für  $b$  (z.B. bei  $b^2 = A - a^2$ ) muss noch eine Plausibilitätsprüfung durchgeführt werden, welcher der Zahlenwerte die gesuchte Lösung darstellt.

## Aufgabensammlung

### Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral

Bestimmen Sie die Stammfunktion / das unbestimmte Integral zu den gegebenen Funktionen:

|  |  |
|--|--|
| a) $f_1(x) = \sqrt{3x^2} - \frac{1}{2}x^2$   | b) $f_2(x) = \frac{3}{3x+7} + \frac{2}{3}x^4 - 3x + 7$ |
| c) $f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ | d) $f_4(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x^2} - 3$       |

## Bestimmtes Integral

Bestimmen Sie das bestimmte Integral zwischen -1 und 3 der folgenden Funktionen sofern keine anderen Grenzen angegeben wurden:

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $f_1(x) = -0.5x^3 + 2x^2 - 4$     | b) $f_2(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$                      |
| c) $\int_{-1}^3 (x^2 - 3x) \cdot dx$ | d) $\int_{-2}^4 (-\frac{1}{4}x^3 - 2x^2) \cdot dx$ |

## Stammfunktion durch einen Punkt

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an, sodass die Graphen der Stammfunktionen jeweils durch den Punkt  $P(1 | 0)$  verlaufen.

|  |  |
|--|--|
| a) $f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{7}x^2 + x - 1$            | b) $f_2(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 2x - 3$ |
| c) $f_3(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$ |  |

## Flächenberechnung (allgemein)

- Bestimmen Sie die Fläche  $A$ , die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$  eingeschlossen wird.
- Bestimmen Sie die Fläche  $A$  im Intervall  $[-2, 2]$ , die von der x-Achse, dem Funktionsgraphen von  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2$  eingeschlossen wird.

## Schnittfläche

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und ermitteln Sie die durch die Graphen der beiden Funktionen  $f(x) = -x^3 + 3$  und  $g(x) = -4x^3 + 4x + 2$  begrenzte Fläche  $A$ .

## Integralrechnung - Berechnung einer unbekanntes Grenze

Bestimmen Sie die Integrationsgrenze  $b$  für die folgenden Integrale.

$$\int_0^b (-2x+1) \cdot dx = -6$$

$$\int_{-1}^b (3x^2-1) \cdot dx = 4$$

$$\int_1^b (4x^3-6x) \cdot dx = 6$$

$$\int \lim_{b \rightarrow -1} x^{b-1} \cdot 2x \cdot dx = 5$$

$$\int \lim_{b \rightarrow 1} x^{b+1} (3x^2-1) \cdot dx = 18$$

$$\int \lim_{b \rightarrow -1} x^{b+1} (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = \frac{8}{3}$$

$$\int \lim_{b \rightarrow 2} x^{b+2} (x^3 + x) \cdot dx = 24$$

## Lösungen (nicht sortiert)

|   |             |                             |   |                                     |                    |                     |
|---|-------------|-----------------------------|---|-------------------------------------|--------------------|---------------------|
| $F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{3}{2} x^2 + 7x + C$ |             |                             | $F(x) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - x + C$ |                                     |                    |                     |
| $F(x) = \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{x} - 3x + C$                     |             |                             | $F(x) = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{6} x^3 + C$              |                                     |                    |                     |
| $A = -63$   | $A = 0$     | $C = 1,883$                 | $C = 0,512$   | $C = 2,233$                         | $A = -\frac{3}{2}$ | $A = -7\frac{1}{3}$ |
| $C = 1,883$   | $C = 0,512$ | $C = 2,233$                 |   |                                     |                    |                     |
| $A = 0,6438 + 2,3292 = 2,973$                                       |             | $A = 2,673 + 0,378 = 3,051$ |   | $A = 4,666 + 0,089 + 0,756 = 5,511$ |                    |                     |

From: <https://www.kopfload.de/> - **kopfload - Lad Dein Hirn auf!**

Permanent link: [https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem\\_integral\\_aufg&rev=1585228072](https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem_integral_aufg&rev=1585228072)

Last update: **2025/11/19 16:13**

