

Integralrechnung - Aufgaben

Arbeitsauftrag

Unbestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $F(x)$ (Stammfunktion; reine Integration keine Grenzen) $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$

Bestimmtes Integral

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: Integral im Intervall $[a, b]$

Flächen werden miteinander verrechnet $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$ (vgl. Gewinn-Verlust-Rechnung in einem Zeitabschnitt)

Bestimmung der Stammfunktion durch Punkt

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$ und ein Punkt P

Gesucht ist: $F(x)$ mit eindeutigem C

Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$, die durch den Punkt P verläuft.

1. Allgemeine Stammfunktion ermitteln (mit C).
2. Einsetzen der Punkt Koordinaten $F(x_p) + C = y_p$, wenn $P(x_p \mid y_p)$

Flächenberechnung (allgemein)

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$

Gesucht ist: $A_a^b = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|$

1. Ermitteln der Nullstellen, um die Teilflächen zu ermitteln. Nullstellen: x_{N1}, x_{N2}, \dots
2. Überprüfen, welche Nullstellen in das Integrationsintervall fallen. z.B.: x_{N2} und x_{N3} fallen in das Integrationsintervall
3. Gesamtes Integral entsprechend der unter 2. ermittelten Nullstellen in Teilflächen unterteilen.
4. Stammfunktion ermitteln.
5. Integral über Stammfunktion (mit Beträgen) berechnen. $A_a^b = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| = \left| \int_a^{x_{N2}} f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_{x_{N2}}^{x_{N3}} f(x) \cdot dx \right|$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^{x_{N2}} f(x) \cdot dx + \int_{x_{N2}}^{x_{N3}} f(x) \cdot dx + \int_{x_{N3}}^b f(x) \cdot dx = F(x_{N2}) - F(a) + F(x_{N3}) - F(x_{N2}) + F(b) - F(x_{N3})$$

Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen: $f(x)$ und $g(x)$

Gesucht ist: A_a^b

1. Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ bilden.
2. Nullstellen der Differenzfunktion $h(x_N) = 0$ ermitteln (diese entsprechen den Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$).
3. Fläche, die von der Differenzfunktion $h(x)$ eingeschlossen wird (von Nullstelle zu Nullstelle), berechnen. Falls vorgegeben müssen hier noch zusätzliche Intervallgrenzen berücksichtigt werden. $A_a^b = \int_a^{x_{N2}} h(x) \cdot dx + \int_{x_{N2}}^{x_{N3}} h(x) \cdot dx + \int_{x_{N3}}^b h(x) \cdot dx = H(x_{N2}) - H(a) + H(x_{N3}) - H(x_{N2}) + H(b) - H(x_{N3})$

(HINWEIS: Häufig wird bei Schnittflächen noch eine Skizze verlangt, nachdem die notwendigen Punkte ermittelt wurden. Bei diesen beiden Funktionen ist dies nicht möglich, da die Nullstellen von $f(x)$ und $g(x)$ nicht ganzzahlig sind.)

Integralrechnung - Berechnung einer unbekanntes Grenze

Gegeben ist eine Funktion: $f(x)$, A und a

Gesucht ist: b bei $\int_a^b f(x) \cdot dx = A$

Bestimmen Sie die Grenze b so, dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche A einem gegebenen Flächenwert entspricht!

1. Integral ggf. aufteilen, wenn Nullstellen vorhanden sind.
2. Gleichsetzen mit gegebener Fläche $|F(b) - F(a)| = A$, da $F(a)$ ein Zahlenwert ist (a ist gegeben), kann nach b aufgelöst werden.
3. Bei mehreren Lösungen für b (z.B. bei $b^2 = A - a^2$) muss noch eine Plausibilitätsprüfung durchgeführt werden, welcher der Zahlenwerte die gesuchte Lösung darstellt.

Aufgabensammlung

Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral

Bestimmen Sie die Stammfunktion / das unbestimmte Integral zu den gegebenen Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2$	b) $f_2(x) = \frac{3}{3x+7}x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 3x + 7$
c) $f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	d) $f_4(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x^2} - 3$

Bestimmtes Integral

Bestimmen Sie das bestimmte Integral zwischen -1 und 3 der folgenden Funktionen sofern keine anderen Grenzen angegeben wurden:

a) $f_1(x) = -0.5x^3 + 2x^2 - 4$	b) $f_2(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$
c) $\int_{-1}^3 (x^2 - 3x) \cdot dx$	d) $\int_{-2}^4 (-\frac{1}{4}x^3 - 2x^2) \cdot dx$

Stammfunktion durch einen Punkt

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an, sodass die Graphen der Stammfunktionen jeweils durch den Punkt $P(1 | 0)$ verlaufen.

a) $f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{7}x^2 + x - 1$	b) $f_2(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 2x - 3$
c) $f_3(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$	

Flächenberechnung (allgemein)

- Bestimmen Sie die Fläche A , die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ eingeschlossen wird.
- Bestimmen Sie die Fläche A im Intervall $[-2, 2]$, die von der x-Achse, dem Funktionsgraphen von $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ eingeschlossen wird.

Lösung:

integral_loesunga1a2.zip

Schnittfläche

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und ermitteln Sie die durch die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = -x^3 + 3$ und $g(x) = -4x^3 + 4x + 2$ begrenzte Fläche A .

Integralrechnung - Berechnung einer unbekanntten Grenze

Bestimmen Sie die Integrationsgrenze b für die folgenden Integrale.

$$\int_0^b (-2x+1) \cdot dx = -6$$

$$\int_{-1}^b (3x^2-1) \cdot dx = 4$$

$$\int \lim_{b \rightarrow \infty} (4x^3 - 6x) \cdot dx = 6$$

$$\int \lim_{b \rightarrow \infty} 2x \cdot dx = 5$$

$$\int \lim_{b \rightarrow \infty} (3x^2 - 1) \cdot dx = 18$$

$$\int \lim_{b \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = \frac{8}{3}$$

$$\int \lim_{b \rightarrow \infty} (x^3 + x) \cdot dx = 24$$

Lösungen (nicht sortiert)

$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{3}{2} x^2 + 7x + C$					$F(x) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - x + C$				
$F(x) = \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{x} - 3x + C$					$F(x) = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{6} x^3 + C$				
$A = -63$	$A = 0$	$C = 1,883$	$C = 0,512$	$C = 2,233$	$A = -\frac{3}{2}$	$A = -7$	$A = -\frac{1}{3}$		
$C = 1,883$	$C = 0,512$	$C = 2,233$							
$A = 0,6438 + 2,3292 = 2,973$			$A = 2,673 + 0,378 = 3,051$		$A = 4,666 + 0,089 + 0,756 = 5,511$				

From: <https://www.kopfload.de/> - kopfload - Lad Dein Hirn auf!

Permanent link: https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem_integral_aufg&rev=1616930387

Last update: 2025/11/19 16:13

