Integralrechnung

Definition Integral

Die **Integration** ist die **Umkehrung der Differentation** (Ableitung). Zu einer gegebenen reellen Funktion $f(x)$ wird die differenzierter reelle **Stammfunktion $F(x)$** als $F'(x)=f(x)$ angegeben.

Formal dieser Zusammenhang wie folgt beschrieben:

$\int{f(x) \cdot dx} = F(x)$

sprich: **`Integral von f von x dx = groß F von x`**

Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Die Begriffe Integral, Stammfunktion und Ableitung hängen eng miteinander zusammen. In der Differentialrechnung wird die Ableitung genutzt, um von einer gegebenen Funktion $f(x)$ (der Stammfunktion) die Steigung an einer beliebigen Stelle x zu ermitteln.

In der Integralrechnung wird ebenfalls von der $f(x)$ ausgegangen. Durch die Integration wird eine neue Funktion $F(x)$ (die Stammfunktion bezogen auf $f(x)$) bestimmt, die die von f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche zwischen zwei Stellen x1 und x2 angibt.

Symbolik	**Schreibweise**	**Funktionsname**	**Operation**	**Bedeutung**
$\int$	F()	Stammfunktion	Integration	Flächenfunktion
	f(x)	gegebene Funktion		
$\frac{df}{dx}$	f'(x)	Ableitung	Differentiation	Steigungsfunktion

Integrationsregeln

Potenzregel

$\int{x^n \cdot dx} = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
mit $n \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}$ und C als Integrationskonstante

Faktorregel

$\int{k \cdot x^n \cdot dx} = k \cdot \int{ x^n \cdot dx} =\frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$

mit $n \in \mathbb{N}$, $k, C \in \mathbb{R}$ und C als Integrationskonstante

Konstantenregel

$\int{k \cdot dx} = k \cdot \int{ x^0 \cdot dx} =\frac{k} \cdot x^{1} + C$

mit $n \in \mathbb{N}$, $k,C \in \mathbb{R}$ und C als Integrationskonstante

Summenregel

$\int{\left(f(x) + g(x) \right) \cdot dx} = \int{ f(x) \cdot dx} + \int{ g(x) \cdot dx} =F(x) + G(x) + C$

mit $f(x), g(x)$ als zwei stetig integrierbare Funktionen. $C \in \mathbb{R}$ als Integrationskonstante

Beispiele

$f(x) = 2 x^2 + 3 x$

$f'(x)= 4 x + 3$

An der Stelle x = 2 wäre demnach die Steigung von $f(x)$:

$f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$f(x) = 2 x^2 + 3 x$

Dann lautet die Stammfunktion von $f(x)$: $F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + C$

Man kann also folgenden Zusammenhang festhalten: $F'(x) = f(x)$

Denn es gilt: $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 x^{(3-1)} + \frac{3}{2} \cdot 2 x^{(2-1)} = 2 x^2 + 3 x$