Herleitung der allgemeinen pq-Formel mittels quadratischer Ergänzung:

Allgemeine quadratische Funktion: $f(x)=a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$

Ansatz für Nullstellensuche: $f(x_N)=0$

Der Funktionswert von $f(x)$ muss an der gesuchten Stelle x_N gleich Null sein.

$$f(x_N)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad a_2\cdot x_N^2+a_1\cdot x_N+a_0=0 \quad |\ :a_2$$

$$\Leftrightarrow\quad x_N^2-\mathbf{2}\cdot\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\cdot x_N+\frac{a_0}{a_2}=0 \quad |\ -\frac{a_0}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_N^2-\mathbf{2}\cdot\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\cdot x_N=-\frac{a_0}{a_2} \quad |\ \text{quadratisch ergänzen um } \pm\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x_N^2-\mathbf{2}\cdot\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\cdot x_N+\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2\right)-\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2=-\frac{a_0}{a_2} \quad |\ \text{Ausklammern und } a_2 \text{ kürzen}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x_N^2-\mathbf{2}\cdot\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\cdot x_N+\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2\right)-\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2=-\frac{a_0}{a_2} \quad |\ +\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x_N^2-\mathbf{2}\cdot\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\cdot x_N+\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2=\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2} \quad |\ \text{2. Binom auf linke Seite anwenden}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x_N-\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2=\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2} \quad |\ \pm\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_N-\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}=\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}} \quad |\ +\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{N\,1,2}=-\frac{a_1}{\mathbf{2}\cdot a_2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}$$

Die allgemeine pq-Formel lautet demnach:

$$x_{N\,1,2}=-\frac{a_1}{\mathbf{2}\cdot a_2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2}\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}$$

mit $p=\frac{a_1}{a_2}$ und $q=\frac{a_0}{a_2}$ wenn die Funktion wie folgt aussieht: $f(x)=a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$

Beispiel: $f(x)=-3\,x^2-2\,x+7$ also $a_2=-3$, $a_1=-2$ und $a_0=7$

$$x_{N\,1,2}=-\frac{(-2)}{2\cdot 3}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{-\mathbf{2}\cdot 3}\right)^2-\frac{7}{3}}$$

$x_{N\,1}=-1{,}897$ und $x_{N\,2}=1{,}23$