Herleitung der allgemeinen pq-Formel mittels quadratischer Ergänzung:

Allgemeine quadratische Funktion: $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Ansatz für Nullstellensuche: $f(x_N) = 0$

Der Funktionswert von $f(x)$ muss an der gesuchten Stelle x_N gleich Null sein.

$$f(x_N) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2 \cdot x_N^2 + a_1 \cdot x_N + a_0 = 0 \quad | :a_2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_N^2 - \mathbf{2} \cdot \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \cdot x_N + \frac{a_0}{a_2} = 0 \quad | -\frac{a_0}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_N^2 - \mathbf{2} \cdot \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \cdot x_N = -\frac{a_0}{a_2} \quad | \text{ quadratisch ergänzen um } \pm \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_N^2 - \mathbf{2} \cdot \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \cdot x_N + \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 \right) - \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 = -\frac{a_0}{a_2} \quad | \text{ Ausklammern und } a_2 \text{ kürzen}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_N^2 - \mathbf{2} \cdot \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \cdot x_N + \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 \right) - \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 = -\frac{a_0}{a_2} \quad | +\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_N^2 - \mathbf{2} \cdot \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \cdot x_N + \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 = \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2} \quad | \text{ 2. Binom auf linke Seite anwenden}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_N - \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 = \left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2} \quad | \pm\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_N - \frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \quad | +\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{N\,1,2} = -\frac{a_1}{\mathbf{2} \cdot a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

Die allgemeine pq-Formel lautet demnach:

$$x_{N\,1,2} = -\frac{a_1}{\mathbf{2} \cdot a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{-\mathbf{2} \cdot a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

mit $p = \frac{a_1}{a_2}$ und $q = \frac{a_0}{a_2}$ wenn die Funktion wie folgt aussieht: $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Beispiel: $f(x) = -3x^2 - 2x + 7$ also $a_2 = -3$, $a_1 = -2$ und $a_0 = 7$

$$x_{N\,1,2} = -\frac{(-2)}{2 \cdot (-3)} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{-\mathbf{2} \cdot (-3)} \right)^2 - \frac{7}{(-3)}}$$ (Korrigiert am 1.12.14)

$x_{N\,1} = -1{,}897$ und $x_{N\,2} = 1{,}23$