Zinsrechnung

Die Zinsrechnung gehört zu den ältesten Berechnungen in der Wirtschaft. Er geht zurück bis ins Altertum[1]. Es werden folgende Begriffe verwendet:

K: Anfangskapital K (analog zum Grundwert)

p: Zinssatz (p %) also p Hundertstel des Anfangskapitals K.

Z: Zinsen Z (analog zum Prozentwert) ist der Teil des Grundwertes also $Z=K\cdot\frac{p}{100}$

In Worten: **Der Zins Z verhält sich zum Kapital K wie der Zinssatz p zu 100**.

Anders als bei der Prozentrechnung kommt bei der Zinsrechnung der Faktor Zeit noch hinzu. Die obige Rechnung gilt für den Zeitraum eines Jahres. Hat man andere Zeiträume, so müssen die Zinsen auf den entsprechenden Zeitraum umgerechnet werden.

Es gilt: $Z=K\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{t}{360}$ mit t in Tagen

Hinweis: Im Allgemeinen wird unabhängig von der tatsächlichen Länge eines Monats/Jahres von folgenden Werten ausgegangen: 1 Monat = 30 Tage und 1 Jahr = 360 Tage.

Beispiel: Wie hoch sind die Jahreszinsen für ein Guthaben von 15.000€, wenn sie mit 3% verzinst werden?

Ansatz: Jahreszins $Z=K\cdot\frac{p}{100}=15.000€\,\frac{3}{100}=450€$ [2]

Beispiel: Wie hoch ist der Zins, wenn ein Betrag von 80.000€ für 80 Tage angelegt und der jährliche Zins läge bei 8000€.

Ansatz: Zins für einen Zeitraum t $Z=K\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{t}{360}=80.000€\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{80}{360}\approx 1.777,78€$

Bei monatlicher Verzinsung lautet die Formel ähnlich. Hier wird t allerdings auf 12 bezogen.

Beispiel: Wie lange wurde ein Darlehen von 75.000€ mit 8% verzinst, wenn 77.500€ zu zahlen sind?

Ansatz: $Z=K\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{t}{360}\Rightarrow 2.500=75.000€\cdot\frac{8}{100}\cdot\frac{t}{360}\Rightarrow t=150\text{ Tage bzw. }5\text{ Monate}$

Zinseszinsrechnung

K1: Kapital nach einem Jahr bei einem Zinssatz von p $K_1=K_0+K_0\cdot\frac{p}{100}=K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$

In Worten: **Das Kapital K_0 erhöht sich innerhalb eines Jahres um den Prozentwert auf K_1.**

Nun werden Anlagen in aller Regel für längere Zeiträume angelegt. Dh. man möchte wissen, wie viel ein Kapital K bei gegebenem Zinssatz nach n Jahren einbringt.

Ansatz: $K_2=K_1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$

Oder für n Jahre: $K_n=K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ Zinseszinsformel

Zur vereinfachten Schreibweise wird häufig q als Zinsfaktor eingeführt: $q=\left(1+\frac{p}{100}\right)$

Zinseszinsformel: $K_n=K_0\cdot q^n$

Beispiel: Wie groß ist das Kapital von 30.000€ in 10 Jahren angewachsen bei einem Zinssatz von 4,5%?

Ansatz: $K_{10}=K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=30.000€\cdot\left(1+\frac{4,5}{100}\right)^{10}=46.589,08€$

1 S. Bibel Altes Testament → Zinsverbot; Verboten wird nur, was auch gemacht wird.
2 Wenn Sie eine Bank kennen, die einen solchen Zins vergibt, dann geben Sie mir bescheid.

Gemischte Verzinsung

Meist beginnt eine Verzinsung nicht mit Jahresbeginn, sondern irgendwann im Laufe des Jahres. Hier wird im Allgemeinen nicht der Zeitraum vom ersten bis zum letzten Tag der Anlage gerechnet, sondern in drei Teile aufgeteilt.

1. Zeitraum bis zum Ende des ersten Jahres
2. Zeitraum mit vollen Jahren
3. Zeitraum im letzten Jahr bis zum Auszahlungstag

Dadurch ergibt sich eine kleine Abweichung zu Gunsten des Anlegers:

Beispiel:

Am 1. April 2010 werden 1000€ zu 3% bis zum 31. März 2017 angelegt.

a) Wie hoch ist die Verzinsung bei einfacher Verzinsung (einmalig über die gesamte Zeit)

b) Wie hoch ist die Verzinsung bei gemischter Verzinsung (aufgeteilt in drei Teile s.o.)

a) K_0 = 1000 € und p= 3% Zeitraum: 7 Jahre

$$K = 1000€ \cdot (1+0{,}03)^7 = 1229{,}87€$$

b) K_0 = 1000 € und p= 3% Zeitraum 1: 9 Monate; Zeitraum 2: 6 Jahre; Zeitraum 3: 3 Monate

$$K = 1000€ \cdot \left(1+0{,}03 \cdot \frac{9 \cdot 30}{360}\right) \cdot (1+0{,}03)^6 \cdot \left(1+0{,}03 \cdot \frac{3 \cdot 30}{360}\right) = 1000€ \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}194 \cdot 1{,}0075 = 1230{,}02€$$

Der Sparer erhält also einen Vorteil von ca. 15 Cent auf 7 Jahre.

Kontinuierliche Verzinsung

Treibt man die gemischte Verzinsung weiter und verkleinert man den Zeitraum der Zinsstellung weiter, so kommt man zur kontinuierlichen oder stetigen Verzinsung.

Beispiel: Drei Bank wählen unterschiedliche häufige Zinsstellungsmodell. Bank A jährlich, Bank B halbjährlich und Bank C vierteljährlich.

Wie hoch ist das Endkapital bei einem Startkapital von 1000€ und einem jährlichen Zinssatz von 3%.

Bank A: $K = 1000€ \cdot \left(1+\frac{0{,}03}{1}\right)^1 = 1030€$

Bank B: $K = 1000€ \cdot \left(1+\frac{0{,}03}{2}\right)^2 = 1030{,}23€$

Bank B: $K = 1000€ \cdot \left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^4 = 1030{,}34€$

Bei der kontinuierlichen Verzinsung wird nun der Zeitraum immer kleiner gemacht es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$K = \lim_{m \to \infty} \left[K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m}\right)^{mn} \right] = K_0 \cdot e^{n \cdot p}$$ mit n: Jahren und m der immer häufigeren Verzinsung.

Kontinuierlich verzinst würde das obige Startkapital als auf $K = 1000€ \cdot e^{1 \cdot 0{,}03} = 1030{,}45€$ innerhalb eines Jahres anwachsen. In der Finanzmathematik wird häufiger mit dieser Verzinsungsart gearbeitet, da man sich über die Zeiträume keine Gedanken mehr machen muss.

Vergleiche das Beispiel aus getrennter Verzinsung: $K = 1000€ \cdot e^{7 \cdot 0{,}03} = 1233{,}68€$

Rentenrechnung

Bei der Rentenrechnung wird anders als bei der reinen Zinsrechnung von einem Ansparen bzw. Auszahlen von bestimmter Höhe ausgegangen. Folgende Definitionen gelten:

Rente r: Zahlungsstrom (konstante Höhe und Zeitabstände)

Rentenperiode: Zeitabstand zwischen zwei Zahlungen

Laufzeit: Anzahl von Zeitabständen in denen Zahlungen erfolgen

Rentenendwert: Wert am Ende der Laufzeit

vorschüssig/nachschüssig: Zeitpunkt der Zahlungen (vor-: zu Beginn des Jahres; nach-: am Ende des Jahres)

Kapitalbildung

Bei der Kapitalbildung wird von einem Anfangskapital K_0 ausgegangen, zu dem n Jahre lang pro Jahr der feste Betrag r gezahlt wird. Der Zinsfaktor q ist wie oben zu $q=1+\frac{p}{100}$ definiert.

Für eine Kapitalbildung gilt folgender Zusammenhang:

$K_n=K_0 \cdot q^n+r \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (nachschüssig; am Jahresende)

$K_n=K_0 \cdot q^n+r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (vorschüssig; zu Jahresbeginn)

Kapitalauszahlung (Verrentung)

Bei der Kapitalauszahlung (auch Verrentung genannt) wird von einem Anfangskapital K0 ausgegangen, von dem n Jahre lang pro Jahr ein fester Betrag r ausgezahlt wird. Alle anderen Werte sind wie oben definiert. Die Formeln ähneln sich sehr stark. Sie unterscheiden sich lediglich in der Subtraktion (statt Addition) des hinteren Teils.

Für eine Kapitalbildung gilt folgender Zusammenhang:

$K_n=K_0 \cdot q^n-r \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (nachschüssig; am Jahresende)

$K_n=K_0 \cdot q^n-r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (vorschüssig; zu Jahresbeginn)

Aufgaben

1. Berechne die Zinsen für
   a) 763 500 € zu 4.5 % in 1 Jahr
   b) 8 953,50 € zu 12 % in 1 Jahr
   c) 56,80 € zu 4,2 % in Jahr
   d) 7 165.50 € zu 7% in Jahr
   e) 69 547 € zu 14 % in 4 Monaten
   f) 80.00 € zu 5 % in 6 Monaten
   g) 250 € zu 4 % in 2 Monaten 12 Tagen
   h) 240 € zu 2,5 % in 1 Monat 18 Tagen
   i) 16 200 € zu 3,5 % in 2 Jahren 3 Monaten 22 Tag
2. Ein halbes Jahr vor der Mehrwertsteuer-Erhöhung von 16 auf 19 Prozentpunkte versuchte der Handel die Kunden zum rechtzeitigen Konsum zu bewegen, damit diese noch zu den alten Konditionen einkaufen konnten.

   Lohnt es sich, für den vorgezogenen Kauf eines neuen Fernsehgerätes im Wert von 600 € sein Konto bei einem Zinssatz von 12 % zu überziehen?
3. a) Zu welchem Betrag wachsen 50000 € innerhalb von 4 Jahren bei 4,5 % Zinseszins an?

   b) Ein Grundbetrag wuchs in 22 Jahren bei 4 % Zinseszins auf 85 000 € an. Wie groß war er?

   c) In wie viel Jahren wachsen 22 500 € bei 5 %iger Verzinsung auf insgesamt 59699 an?

   d) Mit wie viel Prozent wird ein Betrag verzinst, der sich im Verlauf von 20 Jahren verdreifacht?

4. Finden Sie selbst möglichst viele (mindestens drei) sinnvolle Fragestellungen und lösen Sie sie:

   a) Ein Floh von 1,5 mm Größe kann knapp 30 cm hoch springen. Der Weltrekord im Hochsprung beträgt 2,45 m.

   b) Der europäische Springfrosch kann aus dem Stand 2 m weit springen. Das ist das 25-fache seiner Körperlänge (Kopf und Rumpf), die gerade noch 50 % seiner Beinlänge beträgt. Der Weltrekord im Weitsprung beträgt 8,95 m.

   c) Die größten Tiere, die es je gegeben hat, sind die Blauwale: Sie sind 30 m lang und 150 t schwer. Zu Beginn dieses Jahrhunderts bevölkerten schätzungsweise 450000 Blauwale die Meere. 1940 gab es nur noch 100000 und heute sind es gerade noch 2000.
   Ein Blauwalkalb ist schon 7 m lang und wiegt 2,5 t. Es nimmt während der Stillzeit jeden Tag 90 kg zu, während die Mutter ca. 30 % ihres Körpergewichts verliert.
5. Vergleich verschiedener Bank-Angebote: Welches ist günstiger? Begründen Sie ihre Aussage mathematisch!

   a) Bankhaus Kies bietet seinen Kunden, die ihr Geld anlegen wollen, pro Jahr 4% Zinsen an.

   b) Sparkasse Schotter wirbt dagegen damit, dass ihre Kunden im ersten Jahr zwar nur 1% Zinsen bekommen, im zweiten Jahr aber dafür unglaubliche 7%.
6. Ein Makler erhält auf das Angebot "Villa mit Seeblick gegen Höchstgebot zu verkaufen" folgende Angebote:
   a. 580.000,00 € in bar, 290.000,00 € zahlbar nach 5 Jahren;
   b. 800.000,00 € in bar;
   c. 550.000,00 € in bar, im Abstand von jeweils 3 Jahren zwei Raten von je 220.000,00 €
   d. 870.000,00 € zahlbar nach 4 Jahren;
   e. 500.000,00 € in bar, im Abstand von jeweils 2 Jahren drei Raten von je 150.000,00 €

   Ermitteln Sie das Höchstgebot. Berücksichtigen Sie dabei einen Zinssatz von 4,5 %.
7. Ein altruistischer Industrieller möchte 200.000 € seines Vermögens als Stiftung für ienen Kindergarten bereitstellen. Dabei soll das Kapital so lange angelegt werden, bis der Betrag bei 5% jährlicher Verzinsung auf 300.000 € angewachsen ist. Danach soll der Zinsertrag Jahr für Jahr zur Anschaffungen von Spielsachen und Geräten verwendet werden.
   a) Wie viele volle Jahre dauert es, bis zum ersten Mal etwas angeschafft werden kann.
   b) Bestimmen Sie das genaue Kalenderdatum der ersten Zahlung, wenn die Stiftung am 1. Januar 2017 eingerichtet wurde.
8. Ein Betrag von 200.000€ soll über 10 Jahre verrentet werden. Wie hoch ist die Auszahlung bei einem Zinssatz von 3%?
9. Die Eltern legten bei der Geburt ihres Kindes den Betrag von 4.000,00 € als Ausbildungsbeihilfe auf Zinseszins an. Der Betrag wurde 10 Jahre lang mit 5,5%, dann bis zur Vollendung des 18. Lebensjahres mit 6,5 % verzinst.
   a) Welcher Betrag steht dem Kind nach 18 Jahren zur Verfügung?
   b) Damit das Kind das Geld nur als Unterstützung während der Ausbildung einsetzen kann, wird der angesparte Betrag auf 5 Jahr bei 3% verrentet. Wie hoch sind die monatlichen Zahlungen?
10. Ein Arbeitnehmer möchte für Geld ein Auto ansparen. Er kann jedes Jahr 1.200 € zum Ende des Jahres zurücklegen. Zur Zeit erhält er 4% Zinsen. Wie groß ist die angesparte Summe nach 10 Jahren?

Weitere Aufgaben: S. 427 Kusch Auflage 15.