Lineare Gleichungen

Bisher wurden Terme betrachtet, die in sich aber keine Aussage enthalten. Erst durch einen Bezug (gleichwertig/ungleichwertig) können Terme in eine Aussage überführt werden.

Beispiel: x^2-6x+9 ist zunächst nur ein Term. Dieser kann für sich genommen in eine andere Form überführt werden.

Beispiel: $x^2-6x+9=(x-3)^2$ Da beide Seite denselben Zusammenhang darstellen und durch Anwendung der zweiten binomischen Formel ineinander überführt werden können, handelt es sich um eine wahre Aussage. D.h. die linke Seite des Gleichheitszeichen und die rechte Seite sind identisch.

Nun muss bei der Verwendung einer Variablen immer angegeben werden, aus welchem Definitionsbereich diese entnommen wird.

Beispiel: $x\in\mathbb{R}$ d.h. für x dürfen alle reellen Zahlen verwendet werden.

Werden nun zwei unterschiedliche Terme durch ein Gleichzeichen miteinander verbunden, so entsteht eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann.

Beispiel: $x^2=4$ für $x\in\mathbb{R}$ ist eine wahre Aussage, denn es gilt $\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{4}=\pm2$

Beispiel: $x^2=-4$ für $x\in\mathbb{R}$ ist eine falsche Aussage, denn es gibt keine reelle Zahl, die mit sich selbst multipliziert -4 ergibt.

Allgemein kann man von einer **Gleichung** sprechen, wenn man **zwei Terme mit mindestens einer Variablen** durch ein **Gleichheitszeichen verbindet**. Eine solche Gleichung kann **lösbar** (Aussage ist wahr) **oder unlösbar** (Aussage ist falsch) sein.

Enthalten die Terme im obigen Fall **KEINE Variable** so nennt man es eine **Gleichheitsaussage**.

Beispiele:

$x+4=12$ → Gleichungen

$-\sqrt{16}=-4$ → Gleichheitsaussage

Bei den obigen Beispielen ist die Lösung bzw. die Entscheidung, ob die Aussagen wahr oder falsch sind sehr einfach. Häufig kommt es in der Mathematik aber vor, das eine solche Entscheidung nicht sofort ersichtlich ist. Daher werden Gleichungen und Gleichheitsaussagen zunächst umgeformt und so entweder in einen Widerspruch (Aussage falsch) oder eine einfach ablesbare Aussage (Aussage wahr) überführt.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2}&=5 \quad |\cdot 2 \Leftrightarrow\\ x+2&=10 \quad |-2 \Leftrightarrow\\ x&=8\end{aligned} \qquad \text{für} \quad x\in\mathbb{R}$$

Verwendet man also in der ersten Zeile x=8, so wird die erste Gleichung eine wahre Aussage.

Alle anderen Werte für x ergeben eine falsche Aussage.

Man nennt die Überführung von einer Gleichung in eine andere äquivalente Umformung, sofern die Definitionsmenge und die Lösungsmenge nicht verändert wird. Angedeutet wird dies durch das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ (Gleichheitszeichen mit jeweils einem Pfeil auf beiden Seiten).

Äquivalenzumformungen

Zu den äquivalenten Umformungen zählen:

- Addition/Subtraktion einer beliebigen Zahl auf beiden Seiten.

Beispiel:

Addition: $x-2=10 \Leftrightarrow x=12$ oder Subtraktion: $x+5=8 \Leftrightarrow x=3$

- Multiplikation/Division einer beliebigen Zahl $\neq 0$ auf beiden Seiten

Multiplikation: $\frac{x}{3}=10 \Leftrightarrow x=30$ oder Division: $7\cdot x=21 \Leftrightarrow x=3$

- Vertauschung der Seiten

$10=2\cdot x \Leftrightarrow 2\cdot x=10$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $\mathbb{L}_x$ für die folgenden Gleichungen. Bei h), j) und m) sind ggf. Bedingungen für die Formvariablen (a, b usw.) anzugeben. Bei k) bis m) ist zunächst die Definitionsmenge $\mathbb{D}_x$ anzugeben.

   a) $41-3\cdot(3+x)=(x+1)\cdot 5-53$ b) $2\cdot[x-8-(7-x)]0\,130-5\cdot[x-(10-x)]$

   c) $33+9x-(15-3\cdot x)=45-15\cdot x$ d) $\frac{1}{2}-\frac{3\cdot x}{5}+2\cdot x=\frac{3\cdot x}{2}+2-\frac{2\cdot x}{5}$

   e) $(3\cdot x-4)\cdot(4\cdot x-3)=7\cdot x^2+(x-3)\cdot(5\cdot x-6)$ f) $(x+12)\cdot(x-12)=(x-8)^2$

   g) $(x+1)\cdot(4\cdot x-3)=2\cdot(x+1)\cdot(2\cdot x+3)$ h) $\frac{4}{11}-\frac{5\cdot x}{8\cdot a}=2-\frac{8\cdot x}{11\cdot a}$

   i) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=x-3$ j) $\frac{x+b}{2\cdot b}-\frac{x-4\cdot a}{a}=\frac{(a+b)^2}{a\cdot b}$ k) $3+\frac{8+x}{x}=10-\frac{6-x}{x}$

   l) $\frac{9}{x^2-1}+\frac{63}{x+1}=\frac{50}{x-1}$ m) $1-\frac{a^2+x^2}{x^2-1}=\frac{a^2}{x+1}$ n) $\frac{4}{3\cdot x+2}=\frac{5}{4\cdot x+1}$

2. Formen Sie die folgenden Gleichungen nach den **fett geschriebenen** Größen um.

   a) $P=\frac{\boldsymbol{R}-r}{2\cdot\boldsymbol{R}}\cdot Q$ b) $I=\frac{\boldsymbol{n}\cdot U}{R_a+\boldsymbol{n}\cdot R_i}$ c) $a\cdot P\cdot\boldsymbol{S}=\frac{Q}{3}\cdot(\boldsymbol{S}-r)$

3. Lösen Sie die folgenden Textaufgaben mit Hilfe linearer Gleichungen.

   a) Zwei Zahlen unterscheiden sich um 6. Das Vierfache der kleineren Zahl ist um 5 kleiner als das Dreifache der größeren Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen?

   b) Eine zweistellige Zahl hat die Quersumme 12. Stellt man die Ziffern um, so entsteht eine neue Zahl, die um 36 kleiner ist als die ursprüngliche. Wie heißt die ursprüngliche Zahl.

   c) In einer dreistelligen Zahl ist die zweite Ziffer um 1 größer als die erste und die dritte Ziffer das Doppelte der zweiten. Die Zahl ist um 5 größer als das 17fache ihrer Quersumme. Wie heißt die Zahl?

   d) Eine sechs ziffrige zahl hat links eine 2. Schneidet man diese ab und setzt sie rechts wieder an, so ist die neu entstandene Zahl um 88344 kleiner als die ursprüngliche. Ermitteln Sie die ursprüngliche Zahl.

   e) Denken Sie sich eine Zahl, verdoppeln Sie diese, addieren Sie 1, multiplizieren Sie mit 5, addieren Sie 3, und streichen Sie im Ergebnis die letzte Ziffer. Es entsteht eine Zahl, die ebenso groß ist wie die erdachte. Weisen Sie die Richtigkeit der Aussage nach.