1 Problematik

Es gibt in der Mathematik die Notwendigkeit die Lösung von $x^2=-1$ zu bestimmen. Keine reelle Zahl ($\mathbb{R}$) löst dieses Problem. In der Mathematik ist es üblich den bestehenden Zahlraum zu erweitern, so dass eine Lösung definiert wird.

1.1 Zahlenmengenerweiterungen bei bekannten Problemen

Menge	Problem	Erweiterung auf	Neue Menge
$\mathbb{N}$	$2-3=?$ in $\mathbb{N}$ nicht definiert	$2-3=-1$ negative Zahl	$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen
$\mathbb{Z}$	$1:2=?$ in $\mathbb{Z}$ nicht definiert	$\frac{1}{2}=0{,}5$ Dezimalbruch	$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen
$\mathbb{Q}$	$x^2=2$ in $\mathbb{Q}$ nicht definiert	$x=\sqrt{2}$ irrationale Zahl	$\mathbb{R}$ reelle Zahlen
$\mathbb{R}$	$x^2=-1$ in $\mathbb{R}$ nicht definiert	$x=i$ imaginäre Zahl	$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

1.2 Neues Zahlelement

Es wird ein neues Zahlelement hinzugefügt, dass mit sich selbst multipliziert (quadriert) **-1** ergibt. Das Zahlenelement wird als **imaginäre Zahl** *i* bezeichnet.
Es gilt: $i^2=-1$

1.3 Aufbau der komplexen Zahlenmenge

Der Aufbau von komplexen Zahlen ist neu. Aber dann doch irgendwie nicht wirklich.
Aufbau einer Zahl im Dezimalsystem:
$352=3\cdot10^2+5\cdot10^1+2\cdot10^0$ jede Ziffer steht für die Kurzform $Anzahl\cdot10^{Pos-1}$.
So ist es auch bei den komplexen Zahlen. Hier wird das System durch die „Anzahl von i" mit einer entsprechenden Addition erweitert. Zur Kennzeichnung einer komplexen Zahl wird meist statt **x** der die Variable **z** verwendet. Dies ist aber nicht zwingend nötig.
Beispiel: $z=2+4\cdot i$
Allgemeiner Aufbau:
$z=a+b\cdot i$ mit $z\in\mathbb{C}$ und $a,b\in\mathbb{R}$

1.4 Definition der Grundrechenarten in $\mathbb{C}$:

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $u=a_u+b_u\cdot i$ und $v=a_v+b_v\cdot i$ mit $a_u,b_u,a_v,b_v\in\mathbb{R}$ und $u,v\in\mathbb{C}$

Addition:
$u+v=(a_u+a_v)+(b_u+b_v)\cdot i$ wie im Dezimalsystem gleiche Stellen werden addiert.

Subtraktion:
$u-v=(a_u-a_v)+(b_u-b_v)\cdot i$

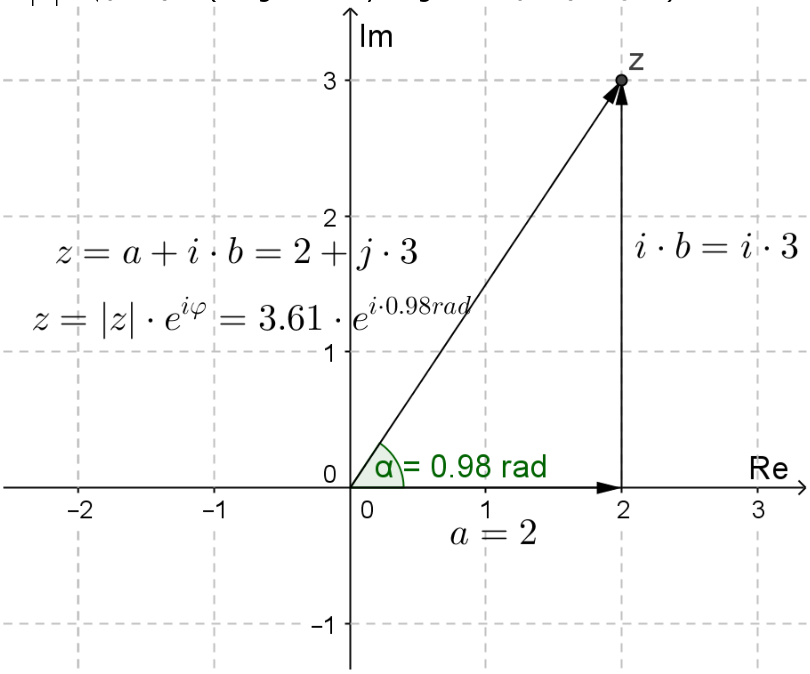
Multiplikation:
Hier muss unterschieden werden. Werden zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert oder eine reelle mit einer komplexen?
1. Fall: **skalare Multiplikation** mit $k\in\mathbb{R}$ und $u\in\mathbb{C}$
$k\cdot u=(k\cdot a_u)+(k\cdot b_u)\cdot i$
2. Fall: **komplexe Multiplikation** mit
$$u\cdot v=(a_u+b_u\cdot i)\cdot(a_v+b_v\cdot i)=a_u\cdot a_v+a_u\cdot b_v\cdot i+b_u\cdot i\cdot a_v+b_u\cdot b_v\cdot i^2=(a_u\cdot a_v-b_u\cdot b_v)+(a_u\cdot b_v+b_u\cdot a_v)\cdot i$$
Die **Differenz der Produkte der Real- und Imaginärteile** bildet den neuen **Realteil**.
Die **Summe der Produkte der Real- und Imaginärteile** bildet den neuen **Imaginärteil**.

Division:
$$\frac{u}{v}=\frac{a_u+b_u\cdot i}{a_v+b_v\cdot i}=\frac{(a_u+b_u\cdot i)\cdot(a_v-b_v\cdot i)}{(a_v+b_v\cdot i)\cdot(a_v-b_v\cdot i)}=\frac{a_u\cdot a_v+b_u\cdot b_v}{a_v^2+b_v^2}+\frac{b_u\cdot a_v-a_u\cdot b_v}{a_v^2+b_v^2}\cdot i$$
mit konjugiert komplexen Zahl (negativer imaginär Teil) also $\overline{v}=a_v-b_v\cdot i$ des Nenners erweitern.

1.5 Darstellung einer komplexen Zahl

Wie kann man sich eine solche Zahl vorstellen bzw. auf dem bisher benutzten Zahlenstrahlmodell abbilden?
Wir haben **<u>ZWEI</u> reelle Zahlen** aus der **<u>EINE</u> komplexe Zahl** gebildet wird. Daher benötigen wir **ZWEI Zahlenstrahlen**, die wir als kartesisches Koordinatensystem anordnen.
Die **bisherige x-Achse** stellt den **reellen Anteil** dar
und die **bisherige y-Achse** stellt den **imaginären Anteil** dar.
Wie könnte man nun **EINE komplexe Zahl** darstellen? → Punkt auf Ebene
Betrag einer komplexen Zahl:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ (Vergleiche Pythagoras $a^2+b^2=c^2$)



Möglichkeit den Punkt mit Winkel und Abstand vom Nullpunkt darstellen.
Hinführung zur Eulerschen Darstellung mit $\vec{z}=|z|\cdot e^{-i\phi}$ (s. Nächstes Kapitel und Geogebra-Blatt)

2 Erweiterte Rechenoperationen

2.1 Umgang mit der Zahl i

Definitionsgleichung: $i^2=-1$ damit gilt auch $i=\sqrt{-1}$ Dies kann für die Berechnung von Wurzeln aus negative Zahlen verwendet werden.

Beispiel: Geben sind zwei Zahlen positive reelle Zahlen a und b, sowie den Wurzeln aus deren negativen Werten. Es gilt folgendes:

$\sqrt{-a}=i\cdot\sqrt{a}$ und damit weiterhin für das Produkt der beiden Wurzeln:

$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=i\cdot\sqrt{a}\cdot i\cdot\sqrt{b}=i^2\cdot\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$

ACHTUNG: NICHT gilt hingegen: $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-8)\cdot(-2)}=\sqrt{16}=4$ FALSCH!!

Es gilt $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}=i\cdot\sqrt{8}\cdot i\sqrt{2}=i^2\sqrt{16}=-4$ RICHTIG!!

Übung:

1. a) $3i\cdot 4i=$ b) $(-2i)\cdot(5i)=$ c) $(-4i)\cdot(-i\sqrt{2})=$ d) $i\sqrt{3}\cdot i\sqrt{2}=$

Lösungen (unsortiert): $-\sqrt{6}$ 10 $-4\cdot\sqrt{2}$ -12

3 Eulersche Darstellung von komplexen Zahlen

Die Exponentialfunktion e^x kann als sogenannte Taylor-Reihe dargestellt werden. Dabei werden Potenzen von x (siehe Zähler x^n) mit immer niedrigerem Anteil (sie Nenner n!) aufaddiert, sodass der eigentliche Wert immer genauer dargestellt werden kann. Das Gleiche kann man mit cos- und der sin-Funktion durchgeführt werden.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Beispiele: e^2, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ mit Taylor-Reihen angenähert:

$x = 2$ und $k = 5$

$$\Rightarrow e^2 \approx 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \approx 7{,}2667$$

Taschenrechner Ergebnis: $e^2 = 7{,}3891$

$x = \frac{\pi}{2}$ und $k = 7$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{8 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{32 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{128 \cdot 7!} \approx 0{,}99984$$

Taschenrechner Ergebnis: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ und $k = 6$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{16 \cdot 4!} - \frac{\pi^6}{64 \cdot 6!} \approx -0{,}00089$$

Taschenrechner Ergebnis: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ersetzt man nun x durch $i \cdot \phi$ so erhält man die Eulersche Darstellung einer komplexen Zahl:

$$e^{i \cdot \phi} = 1 + i \cdot \phi + \frac{(i \cdot \phi)^2}{2!} + \frac{(i \cdot \phi)^3}{3!} + \frac{(i \cdot \phi)^4}{4!} + \frac{(i \cdot \phi)^5}{5!} \ldots$$

Es gilt $i^2 = -1$

$$e^{i \cdot \phi} = 1 + i \cdot \phi - \frac{\phi^2}{2!} - i \cdot \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + i \cdot \frac{\phi^5}{5!} \ldots$$

Real- und Imaginäranteil trennen:

$$e^{i \cdot \phi} = \underbrace{\left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!}\right)}_{\cos(\phi)} + i \cdot \underbrace{\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \ldots\right)}_{\sin(\phi)}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{e^{i \cdot \phi} = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)}$$

Die Eulersche Darstellung bietet eine sehr kompakte Schreibweise für komplexe Zahlen und hat dazu den Vorteil, dass alle bekannten Rechenoperationen einfach angewendet werden können.

4 Anwendung von komplexen Zahlen in der Elektrotechnik

In der Elektrotechnik wird hauptsächlich die Eulerschen Zahlendarstellung $(z=|z|\cdot e^{-i\cdot\varphi})$ verwendet. Die Multiplikation und Division lassen sich in dieser Schreibweise eleganter ausführen, als in der algebraischen Schreibweise $(a+i\cdot b)$.

4.1 Multiplikation mit Eulerschen Zahlendarstellung

Rechnung mit Komponentenform:

Gegeben: $z_1=2+3i$ und $z_2=1+2i$ Gesucht: $z=z_1\cdot z_2$

$$z=(2+3i)\cdot(1+2i)=2\cdot 1+2\cdot 2i+1\cdot 3i+3i\cdot 2i$$
$$=-4+7i$$

Rechnung mit Eulerscher Zahlendarstellung:

Gegeben: $z_1=2+3i$ und $z_2=1+2i$ Gesucht: $z=z_1\cdot z_2$

Zunächst Umwandlung in Eulersche Darstellung:

$$z_1=\sqrt{2^2+3^2}\cdot e^{i\cdot\arctan(\frac{3}{2})}=\sqrt{13}\cdot e^{i\cdot 56{,}3\,°}$$

$$z_2=\sqrt{1^2+2^2}\cdot e^{i\cdot\arctan(\frac{2}{1})}=\sqrt{5}\cdot e^{i\cdot 63{,}4\,°}$$

$$z=\sqrt{(-4)^2+7^2}\cdot e^{i\cdot\arctan(\frac{7}{-4})}=\sqrt{65}\cdot e^{i\cdot 19{,}7\,°}$$

$$|z|=|z_1|\cdot|z_2| \quad \text{und} \quad \varphi=\varphi_1+\varphi_2$$

Allgemein lässt sich also schreiben:

$$|z|=z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)}$$

4.2 Division mit Eulerschen Zahlendarstellung

Rechnung mit Komponentenform:

Gegeben: $z_1=2+3i$ und $z_2=1+2i$ Gesucht: $z=z_1\cdot z_2$

$$z=\frac{(2+3i)}{(1+2i)}=\frac{(2+3i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}=\frac{8-i}{5}$$
$$=\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i$$

Zunächst Umwandlung in Eulersche Darstellung:

$$z_1=\sqrt{13}\cdot e^{i\cdot 56{,}3\,°}$$

$$z_2=\sqrt{5}\cdot e^{i\cdot 63{,}4\,°}$$

$$z=\frac{\sqrt{8^2+1^2}}{5}e^{-i\cdot 7{,}124\,°}\cdot e^{i\cdot\arctan(\frac{-1}{8})}$$

$$|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{und} \quad \varphi=\varphi_1-\varphi_2$$

4.3 Umrechnung von der kartesischen in polare Schreibweise und umgekehrt

$z=a+i\cdot b$ karthesische / algebraische Schreibweise

$z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ trigonometrsiche Schreibweise

$z=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$ eulersche / Exponential / polar Schreibweise

mit $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$

mit $a=r\cdot\cos\varphi$ und $b=r\cdot\sin\varphi$

5 Übungen

5.1 Berechnen Sie jeweils die vorgegebenen Ausdrücke für die folgenden Zahlen.

$2z_1$, $2z_1+z_2$, z_2-z_1 , $z_1\cdot z_2$, z_1^2 und $z_1:z_2$

a) $z_1=-1-8i$ und $z_2=-2-3i$

b) $z_1=2+3i$ und $z_2=-3+2i$

c) $z_1=-5+4i$ und $z_2=-4-5i$

Lösungen (unsortiert):

$-63+16i$ $4+6i$ $-i$ $-12-5i$ $-2-16i$ $-4-19i$ $-22+19i$ $-14+3i$ $-1+5i$ $-i$ $9-40i$ $2+i$ $-5-i$ $1+8i$ $40+9i$ $1-9i$ $-5+12i$ $-10+8i$

5.2 Errechnen Sie die Beträge folgender komplexer Zahlen und geben Sie die Polarschreibweise an.

a) $z_1=6+8i$ b) $z_2=12-5i$ c) $z_3=-20-15i$

Lösungen (unsortiert):

$r=13$ $\varphi\approx-0{,}395$ $13\cdot e^{-j\cdot 0{,}395}$ $r=25$ $\varphi\approx0{,}644$ $25\cdot e^{j\cdot 0{,}644}$ $r=10$ $\varphi\approx0{,}927$ $10\cdot e^{j\cdot 0{,}927}$

5.3 Berechnen Sie die folgenden Potenzen von i.

a) i^2 b) i^3 c) i^4 d) i^5 e) i^6 f) i^{27}

Lösungen (unsortiert): 1 $-i$ $-i$ -1 -1 i

5.4 Berechnen Sie für $z_1=3+2i$ und $z_2=-2+3i$ folgende Verknüpfungen.

a) $z_1+\overline{z_2}$ b) $\overline{z_1}+z_2$ c) $\overline{z_1}+\overline{z_2}$ d) $z_1-\overline{z_2}$ e) $\overline{z_1}-z_2$ f) $\overline{z_1}-\overline{z_2}$

Lösungen (unsortiert): $5-5i$ $1-5i$ $1+i$ $1-i$ $5+i$ $5+5i$

5.5 Berechnen Sie folgende Divisionen in algebraischer und Eulerscher Darstellung

a) $\frac{22}{2-7i}$ b) $\frac{1+i}{1-i}$

Lösungen (unsortiert): $z=i$ $z=0{,}830+2{,}91i$ $z=1\cdot e^{i\cdot 90°}$ $z=3{,}02\cdot e^{i\cdot 74{,}05°}$

5.6 Berechnen Sie jeweils den komplexen Widerstand Z für die beiden Phasenverschiebungen zwischen U und I.

a) U=12V I=50mA $\varphi_1=-10°$ b) U=5V I=10mA $\varphi_2=70°$

Lösungen (unsortiert): $z=240\cdot e^{-i\cdot 10°}\Omega$ $z=172{,}01-i\,469{,}85\Omega$ $z=236{,}35-i\,41{,}68\Omega$ $z=500\cdot e^{i\cdot 70°}\Omega$