

1 Arbeitsauftrag allgemein

Auftrag:

A1: Lesen Sie sich den jeweiligen Theorieteil im Buch und auf Kopflad durch. Versuche Sie die Rechnungen nachzuvollziehen.

A2: Rechnen Sie mindestens zwei Aufgaben zu jedem Teil. Wo Sie die Aufgaben finden, steht in den jeweiligen Abschnitten. Sollte es Ihnen schwerfallen, dann rechnen Sie mehr Aufgaben. Sollten Sie nicht zu recht kommen, dann kontaktieren Sie mich bitte.

A3: Reichen Sie per E-Mail Ihre Ergebnisse ein, damit ich Ihnen Feedback geben kann, ob Sie das Thema verstanden haben. Ich werde nicht abgegebene Unterlagen nicht negativ bewerten. Ich verstehe das als Möglichkeit Ihnen weiterzuhelfen!!

A4: Bearbeiten Sie zusätzliche vertiefende Aufgaben. Diese Aufgabe können alte Prüfungsaufgaben sein (werde über Moodle bereitgestellt) oder prüfungsähnliche Praxisaufgaben. Erstes Ziel sollte sein einen Lösungsweg (nicht unbedingt mit Rechnung) ausschreiben zu können.

2 Integralrechnung offene Themen (s. E-Mail)

2.1 Schnittflächen zwischen zwei Funktionen

Die Theorie wird auf der folgenden Seite beschrieben. Dort finden sich auch die Bezüge zum Buch (ausführliche Erklärungen, Beispiel etc.)

<https://www.kopflad.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:schnittflaeche>

Im Wesentlichen unterscheidet sich diese Betrachtung nicht von der echten Flächenberechnung, die wir zu letzt behandelt haben (s. Punkt 1 in "Formelsammlung"). Man muss lediglich zunächst die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ bilden und dann die eingeschlossene Fläche von $h(x)$ mit der x -Achse bestimmen (s. Punkt 1 in "Formelsammlung")

Auftrag:

A1: Allgemeiner Auftrag zum Durcharbeiten des Theorieteils.

A2: Rechnen Sie von S. 235 Aufgabe 4. mindestens zwei Aufgaben. Sollte es Ihnen schwerfallen, dann mehr Aufgaben.

A3: Reichen Sie per E-Mail Ihre Ergebnisse ein, damit ich Ihnen Feedback geben kann, ob Sie das Thema verstanden haben.

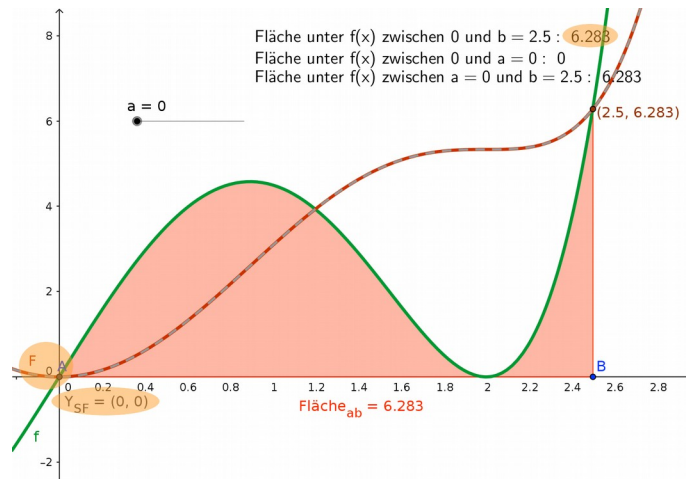
A4: Vertiefende Aufgaben: Bearbeiten Sie von S. 236 Aufgabe 7. Diese Aufgabe ist prüfungsähnlich.

2.2 Bestimmung der Integrationskonstante C, so dass die Stammfunktion durch einen vorgegebenen Punkt verläuft

Die Theorie wird auf der folgenden Seite beschrieben. Dort finden sich auch die Bezüge zum Buch (ausführliche Erklärungen, Beispiel etc.)

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:konstante_c

Betrachtet man eine beliebige integrierbare Funktion $f(x)$, dann kann man die dazugehörige Stammfunktionen $F(x)$ durch das unbestimmte Integral bestimmen.



(grüne Kurve $f(x) = 0,5x^5 - 4x^3 + 8x$ rote Kurve $F(x) = \frac{1}{12}x^6 - x^4 + 4x^2 + C$)

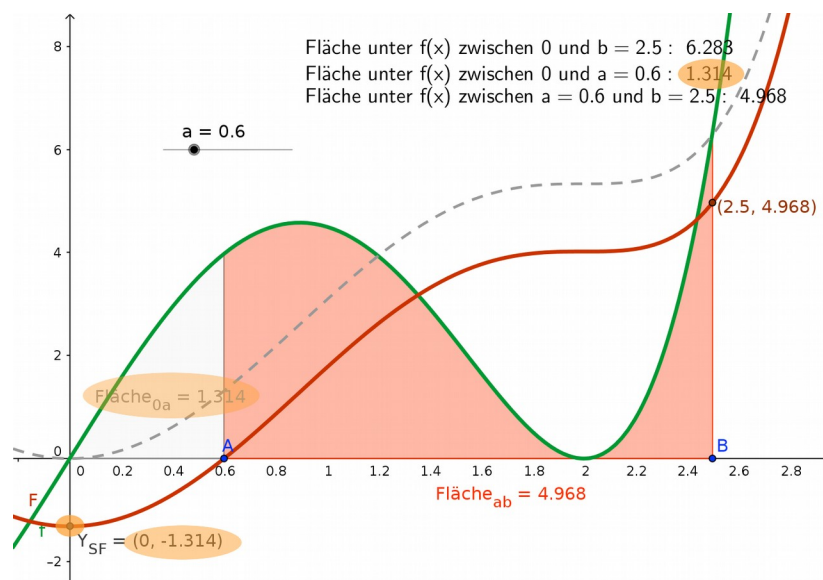
Zur besseren Verdeutlichung wurde ein Integral von $a=0$ bis $b=2,5$ (rosa hinterlegt) eingezeichnet. Die entsprechenden Flächen sind oberhalb abzulesen (Für das Intervall $[0;2,5] \rightarrow 6,283$)

Dabei ist zunächst $C=0$ wie man am Durchlauf der roten Kurve durch den Ursprung $(0;0)$ erkennt.

Durch Verändern der linken unteren Integrationsgrenze ($a=0$) auf den Wert $a=0.6$ (willkürlich).

Hierdurch verschiebt sich die Kurve der Stammfunktion $F(x)$ um genau den Wert 1,314 nach Unten (vgl. y-Achsenabschnitt von $F(x) = -1,314$ und damit Integrationskonstante $C = -1,314$ mit dem Wert der Fläche im Intervall $[0;0,6]=1,314$).

Es ergibt sich also exakt der Wert der Fläche im Intervall $[0;a=0,6]$ als neuer negativer y-Achsenabschnitt bzw. C bei der Stammfunktion $F(x)$. s. orange Markierung in der nächsten Abbildung:



Wie man an der gestrichelten Kurve (ursprünglichen Stammfunktion) sieht, ist die Form der Stammfunktion nicht verändert, sondern nur die Lage.

Man kann auch umgekehrt über die Verschiebung der Stammfunktion die Integrationskonstante C ermitteln:

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein Punkt $P(x_p, y_p)$, durch den die Stammfunktion laufen soll. Gesucht ist nun die Integrationskonstante C, die dies ermöglicht.

Durch folgenden Ansatz kann C ermittelt werden.

Ansatz:

$$F(x_p) + C = y_p \quad (\text{Einsetzen des Punktes P in die Stammfunktion})$$

Anschließend wird nach C aufgelöst.

Beispiel:

Gegeben: $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$

Gesucht: Berechnen Sie die Integrationskonstante C der Stammfunktion F(x), damit F(x) durch den Punkt P(1|4) verläuft.

Ansatz:

1. Zunächst wird die Stammfunktion F(x) nach den bekannten Integrationsregeln bestimmt:

$$F(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x + C$$

2. Koordinaten von P in F(x) einsetzen, dann nach C auflösen:

$$F(1) + C = 4$$

$$\Leftrightarrow F(1) = -(1)^3 + 2 \cdot (1)^2 + 5 \cdot (1) + C = 4$$

$$\Leftrightarrow C = 4 + 1 - 2 - 5 = -2$$

Auftrag:

A1: Allgemeiner Auftrag zum Durcharbeiten des Theorieteils.

A2: Rechnen Sie auf der folgenden Seite im Abschnitt „Stammfunktion durch einen Punkt“ alle Aufgaben.

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem_integral_aufg#stammfunktion_durch_einen_punkt

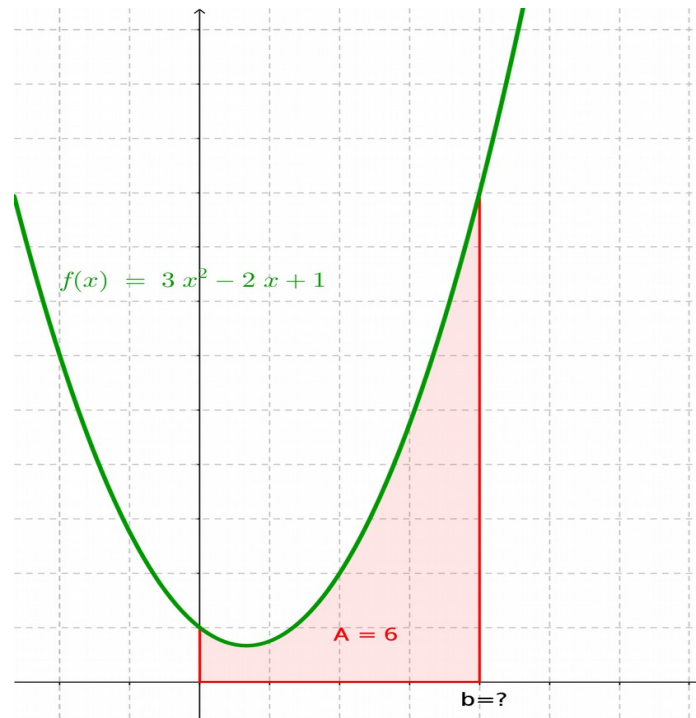
A3: Reichen Sie per E-Mail Ihre Ergebnisse ein, damit ich Ihnen Feedback geben kann, ob Sie das Thema verstanden haben.

A4: Vertiefende Aufgaben: gibt es hier eigentlich nicht, da der Aufgaben Type relativ einfach ist.

2.3 Bestimmung der Integrationsgrenze bei gegebener Fläche

Bisher wurden bestimmte Integrale oder Flächenberechnungen betrachtet, bei denen **beide** Integrationsgrenzen bekannt sind.

Angenommen man kennt zwar die **Funktion $f(x)$** und **eine Integrationsgrenze**, dann könnte man die **zweite Integrationsgrenze** bestimmen, wenn man weiß wie groß **die eingeschlossene Fläche** ist.



Aufgabenstellung

Es soll die Integrationsgrenze b bestimmt werden, wenn eine vorgegebene Fläche A gegeben ist.

Gegeben: A

Gesucht: $b = ?$

Ansatz:

$$\int_0^b f(x) dx = A$$

$$\Leftrightarrow F(b) - F(0) = A$$

$$\Leftrightarrow F(b) = A \quad \text{denn es gilt immer } F(0) = 0$$

nach a auflösen oder mit Taschenrechner b bestimmen

HINWEIS: Taschenrechnerergebnisse, die ein i enthalten können in diesem Fall ignoriert werden, da sie komplexe Lösungen darstellen.

Es kann bei diesen Aufgaben auch vorkommen, dass beide Grenzen von einer Variable abhängen, dann muss die entsprechende Grenze eingesetzt werden. Der Aufwand erhöht sich dann ein wenig. Der Ansatz bleibt aber identisch.

$$\int_{b-2}^b f(x) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow F(b) - F(b-2) = 8$$

Nach b auflösen

Beispiel:

Gegeben: $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ und der Flächeninhalt $A=6$ (s.obige Abbildung)

Gesucht: Wie groß muss die Grenze b gewählt werden, damit die eingeschlossene Fläche dem Flächeninhalt A entspricht.

Ansatz:

1. Zunächst wird die Stammfunktion $F(x)$ nach den bekannten Integrationsregeln bestimmt:

$$F(x) = x^3 - x^2 + x + C$$

2. Integral ansetzen mit den gegebenen Grenzen ($a=0$ und b als Variable) und gleichsetzen mit der gegebenen Fläche A :

$$\int_0^b f(x) dx = A$$

$$\Leftrightarrow (b)^3 - (b)^2 + (b) - F(0) = A = 6$$

$$\Leftrightarrow b^3 - b^2 + b - 6 = 0$$

mit Taschenrechner lösen: $b=2$

HINWEIS: Taschenrechnerergebnisse, die ein i enthalten können in diesem Fall ignoriert werden, da sie komplexe Lösungen darstellen.

Auftrag:

A1: Allgemeiner Auftrag zum Durcharbeiten des Theorieteils.

A2: Rechnen Sie auf der folgenden Seite im Abschnitt „Berechnung einer unbekanntem Grenze“ mindestens **zwei** Aufgaben (1. und 4. Aufgabe). Also eine Aufgabe mit einer unbekanntem Grenze und eine mit zwei unbekanntem Grenzen (b kommt in beiden Grenzen vor). Ansonsten gilt der allgemeine Auftrag.

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem_integral_aufg#integralrechnung_-_berechnung_einer_unbekanntem_grenze1

A3: Reichen Sie per E-Mail Ihre Ergebnisse ein, damit ich Ihnen Feedback geben kann, ob Sie das Thema verstanden haben.

A4: Vertiefende Aufgaben:

2.4 Zur Orientierung kann diese Seite auf meiner Homepage genutzt werden:

<https://www.kopfload.de/doku.php?id=mathe:integral:haupt>

Das PDF hier gibt nochmal die wesentlichen Berechnungen zusammengefasst wieder. Ich habe es damals erstellt als "**Formelsammlung**". Allerdings war zu dieser Zeit tatsächlich noch eine eigene Formelsammlung erlaubt. Jetzt kann es als Überblick über die verschiedenen Rechenwege dienen:

https://www.kopfload.de/lib/exe/fetch.php?media=lager:mathe:integral:h2-07_04_berechnung_einer_unbekanntem_grenze.pdf

Zur Vertiefung können die anderen Seite auf der Übersichtsseite (HAUPT) genutzt werden.

Dort befinden sich gemischte Aufgaben zu allen Integralthemen..

https://www.kopfload.de/doku.php?id=lager:mathe:integral:gem_integral_aufg
(inkl. Lösungen)

3 Wiederholung Schnittflächen Bestimmung

Einfache Aufgaben zu eingeschlossenen Flächen

Berechnen Sie jeweils die eingeschlossene Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

a) $f(x) = x^2 - 9$ und $g(x) = -x^2 + 9$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ und $g(x) = -x + 3$

c) $f(x) = 4x - x^3$ und $g(x) = 2x - x^2$

d) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ und $g(x) = x^3 + x$