Lineare Gleichungssysteme

Einleitung mit Vorüberlegungen

Zunächst wird ein 2×2 LGS1) betrachtet. Das heißt es besteht das Problem zwei Unabhängige (Variablen) so zu bestimmen, dass sie eindeutig sind. Dazu muss pro Variable eine Bedingung vorhanden sein. Eine Bedingung wird in Form einer Gleichung dargestellt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich mittels verschiedener Verfahren2) auflösen, so dass die Variablen x und y eindeutig bestimmt werden.

Im obigen Beispiel lässt sich sehr leicht das Additionsverfahren anwenden, um x zu isolieren.

$$\begin{aligned} x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \quad |+ \\ x+y &= 3 \\ 2x &= 4 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \boldsymbol{L}=(2\,;\,1)$$

Die größte Schwierigkeit ist es die beste Lösungsvariante für ein neues LGS zu finden und im Anschluss anzuwenden. Wesentlich sinnvoller ist es die Lösungsschritte einmal allgemein vorzunehmen und im Anschluss das Ergebnis als eine Formel festzuhalten. Hierdurch spart man die immer gleiche Arbeit der Lösung und läuft darüberhinaus nicht Gefahr das „falsche Verfahren“ angewendet zu haben.

Um den Aufwand zur Lösung zu reduzieren, erarbeiten wir EINE allgemeine Lösung eines 2x2LGS, statt jedes für sich neu umzuformen:

Damit die allgemeine Lösung später einfach anwendbar ist, ist es notwendig eine einheitliche Ausgangsbasis zu schaffen. Es wird die allgemeine Schreibweise eines 2x2 LGS gewählt:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 &= k_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 &= k_2 \end{aligned}$$

Dabei werden die Zeilen durch die erste Position im Index gekennzeichnet und die Spalte (gleichbedeutend mit der Variable). Beispiel: $a_{21} \Rightarrow$ zweite Zeile und erste Spalte

Die rechte Seite der Gleichungen enthält keine Variablen, somit ausschließlich Zahlen also Konstanten. Sollte eine Gleichung nicht diesem System entsprechen, so ist sie zunächst umzuformen.

Nun wird versucht beide Gleichungen mit geeigneten Werten so zu multiplizieren, dass die auf entstehenden Gleichungen das Additionsverfahren angewendet werden kann. Im Folgenden wird versucht, die Variable x_1 aus der zweiten Gleichung zu eleminieren.

$$\left|\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 &= k_1 \quad |\cdot -a_{21} \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 &= k_2 \quad |\cdot a_{11} \end{aligned}\right|$$

$$\left|\begin{aligned} -a_{11}\,a_{21}\cdot x_1 + a_{12}\,a_{21}\cdot x_2 &= -k_1\,a_{21} \quad |+\text{ zweite Zeile} \\ a_{11}\,a_{21}\cdot x_1 + a_{11}\,a_{22}\cdot x_2 &= k_2\,a_{11} \end{aligned}\right|$$

x_1 fällt weg und die folgende Gleichung bleibt erhalten

$$\Rightarrow x_2\cdot(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})=k_2\,a_{11}-k_1\,a_{21}$$

Damit ergibt sich folgende Lösung für x_2 :

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{k_2 a_{11} - a_{21} k_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$ Für x_1 gilt analog: $\Rightarrow x_1 = \dfrac{k_1 a_{22} - a_{12} k_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$

Nun kann man bei einem Vergleich der Nenner und Zähler der beiden Brüche feststellen, dass diese sehr leicht mit einer Regel gebildet werden können.

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = k_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = k_2 \end{array} \rightarrow \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Der Nenner errechnet sich, in dem jeweils in Pfeilrichtung das Produkt gebildet wird un die beiden Produkte von einander subtrahiert werden ① **-** ② der Nenner wird Hauptdeterminante D genannt.

Damit lässt sich nun die **Cramer'sche Regel zum Lösen von 2x2 LGS** wie folgt formulieren:

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{k_1 a_{22} - a_{12} k_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{D_{x2}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{k_2 a_{11} - a_{21} k_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Betrachtung zur Lösbarkeit von LGS

Beispiel 1: $D \neq 0$

Nach Ermittlung der Determinaten ergibt sich:

$D = 2 \quad D_{x1} = 0$ und $D_{x2} = 4$

also

$$x_1 = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Da $x_1 = 0$ eine gültige Lösung ist, ist das LGS immer eindeutig lösbar, so bald $D \neq 0$ ist.

Beispiel 2: $D = 0$

Nach Ermittlung der Determinaten ergibt sich:

$D = 0 \quad D_{x1} = 0$ und $D_{x2} = 4$

also

$$x_1 = \frac{0}{0} = 0$$

$x_2 = \dfrac{4}{0}$ WIDERSPRUCH nicht erlaubt

In beiden Formel wird dann der Nenner zu Null. Wobei eine „lösbar" und die andere „nicht lösbar" ist

Wenn als **D= 0 und darüberhinaus** D_{x1} **oder** D_{x2} **ungleich Null** ist, dann müsste eine Zahl durch Null dividiert werden, was eine ungültige Operation darstellt.

Wenn hingegen **D = 0 und auch die beiden anderen Determinanten** $D_{x1} = D_{x2} = 0$ gleich Null sind, dann ist das LGS lösbar und zwar mit unendlich vielen Lösungen.

Musterlösungen zu 2x2 LGS mit Cramer'scher Regel:

Beispiel 1: Eindeutig lösbar $D \neq 0$

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -3x & + & 4y & = & -2 \end{array} \right|$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - ((-3) \cdot (-3)) = 8 - 9 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - ((-3) \cdot (-2)) = 4 - 6 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (1 \cdot (-3)) = -4 + 3 = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Probe: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$
und: $-3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -6 + 4 = -2$
$\boldsymbol{L} = \{(2\,;\,1)\}$

Beispiel 2: Nicht lösbar $D = 0$ und D_x bzw. $D_y \neq 0$

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & -1 \\ -6x & + & 4y & = & -2 \end{array} \right|$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - ((-2) \cdot (-6)) = 12 - 12 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - ((-2) \cdot (-2)) = -4 - 4 = -8 \neq 0$$

$\Rightarrow D = 0$ und $D_x \neq 0 \Rightarrow$ nicht lösbar

Beweis: GL2 durch -2 teilen
$\Rightarrow 3x - 2y = 1$ widerspricht GL1
$L = \{\}$ leere Menge

Beispiel 3: Lösbar mit unendlich vielen Lösungen $D = D_x = D_y = 0$

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -1 \\ -2x & + & 4y & = & 2 \end{array} \right|$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - ((-2) \cdot (-2)) = 4 - 4 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - (2 \cdot (-2)) = -4 + 4 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - ((-1) \cdot (-2)) = 2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow D = D_x = D_y = 0$ Beweis: GL2 mit -2 multiplizieren
$\Rightarrow -2x + 4y = 2$ entspricht exakt GL1

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x + 1)$$

$$L = \left\{ \left(x\,;\, \frac{1}{2} \cdot (x + 1) \right) \right\}$$

Zu jedem x findet sich im dritten Beispiel ein passendes y. Also unendlich viele Päärchen.