Einleitung

Beispiel für ein einfach lösbares 3x3 LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & x & - & 2y & + & 2z & = & -19 \\ (II) & & & 3y & + & z & = & 8 \\ (III) & & & & & 3z & = & -12 \end{array}$$

Aus III: $\Rightarrow 3z=-12 \Rightarrow z=-4$

Aus II: $\Rightarrow 3y-4=8 \Rightarrow y=4$

Aus I: $\Rightarrow x-2\cdot 4+2\cdot(-4)=-19 \Rightarrow x=-3$

Lösung: $\boldsymbol{L}_{x;y;z}=\{(-3;4;-4)\}$

Warum ist das LGS so einfach lösbar?

z kann ohne weiteres Umstellen durch direkte Division berechnet werden. In der zweiten Gleichung sind nur y und z enthalten, sodass auch y direkt errechnet werden kann. Durch Einsetzen der Werte von y und z in die erste Gleichung, kann x errechnet. Man nennt diese Form eines LGS auch die „untere Dreiecksform", da dort überall „Null" steht.

Ziel

Ein beliebiges LGS soll in die untere Dreiecksform zubringen, um möglichst einfach zu einer Lösung zu kommen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & = & k_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & a_{23}\cdot x_3 & = & k_2 \\ a_{31}\cdot x_1 & + & a_{32}\cdot x_2 & + & a_{33}\cdot x_3 & = & k_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & = & k_1 \\ 0\cdot x_1 & + & a'_{22}\cdot x_2 & + & a'_{23}\cdot x_3 & = & k_2 \\ 0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & a'_{33}\cdot x_3 & = & k_3 \end{array}$$

a'_{22}, a'_{23} und a'_{33} sind neue Koeffizienten, die sich nach der Berechnung mittels des Gauß-Algorithmus ergeben.

Gauß-Algorithmus (Formelsammlung)

Die folgenden Schritte geben den Algorithmus in Worten wieder.

1. Beginne mit der ersten Gleichung
2. Multipliziere diese Gleichung, mit einem geeignetem Faktor, so dass die ersten Koeffizienten (ungleich Null) negativ gleich groß sind.

   z.B. a_{11} = -3 und a_{21} = 5 Faktor für die erste Gleichung: $\left(-\frac{5}{(-3)}\right)$.
3. Addiere die beiden Gleichungen, so dass im Ergebnis der erste Koeffizient gleich Null wird.
4. Wiederholen der Schritte 2. und 3. mit allen weiteren Gleichungen, so dass in allen Gleichungen (bis auf der ersten) der erste Koeffizient gleich Null ist.
5. Wiederhole die Schritte 2. bis 4. für den nächsten Koeffizienten, bis in der letzten Gleichung nur noch der letzte Koeffizient ungleich Null ist.

Musterbeispiel:

Berechnen Sie mithilfe des Gauß-Algorithmus das folgende 3x3 LGS.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} I: & 6\cdot x_1 & - & 12\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -6 \\ II: & -3\cdot x_1 & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & = & -5 \\ III: & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 4 \end{array}$$

Kommentar Umformungen	Koeffizienten			Rechte Seite (RS)
	x1	**x2**	**x3**	
I	**6**	**-12**	**3**	**-6**
II	**-3**	**1**	**-2**	**-5**
$I'=-\frac{(-3)}{6}\cdot I=\frac{1}{2}\cdot I$	*3*	*-6*	*1,5*	*-3*
III	**2**	**1**	**2**	**4**
$I''=-\frac{2}{6}\cdot I=-\frac{1}{3}\cdot I$	*-2*	*4*	*-1*	*2*
I	**6**	**-12**	**3**	**-6**
$II'=I'+II$	**0**	**-5**	**-0,5**	**-8**
$III'=I''+III$	**0**	**5**	**1**	**6**
$III''=-\frac{5}{(-5)}\cdot II'=1$	*0*	*-5*	*-0,5*	*-8*
I	**6**	**-12**	**3**	**-6**
$II'=I'+II$	**0**	**-5**	**-0,5**	**-8**
$III''=II'+III'$	**0**	**0**	**0,5**	**-2**

Von unten nach oben die Gleichungen jeweils nach einer Variablen auflösen:

$III''\Rightarrow \quad 0{,}5\cdot x_3=-2 \quad \Rightarrow \mathbf{x_3=-4}$

$II'\Rightarrow \quad -5\cdot x_2+(-0{,}5)\cdot(-4)=-8 \quad \Rightarrow -5\cdot y=-10 \quad \Rightarrow \mathbf{x_2=2}$

$I\Rightarrow \quad 6\cdot x_1+(-12)\cdot 2+3\cdot 4=-6 \quad \Rightarrow 6\cdot x=30 \quad \Rightarrow \mathbf{x_1=5}$

Lösung: $\quad \mathbf{L}_{x_1|x_2|x_3}=\{(5|2|-4)\}$