

Gauß Algorithmus

Ziel

Ein beliebiges LGS in die untere Dreiecksform zubringen, um möglichst einfach zu einer Lösung zu kommen.

$$(I) \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = k_1$$

$$(II) \quad 0 \cdot x_1 + a'_{22} \cdot x_2 + a'_{23} \cdot x_3 = k_2$$

$$(III) \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a'_{33} \cdot x_3 = k_3$$

Beispiel für Gauß Algorithmus

Um Schreibarbeit zu sparen, wird eine neue Schreibweise eingeführt. Die Variablen x_1 , x_2 und x_3 werden als Spaltenköpfe über die Koeffizienten geschrieben. In die Zeilen werden dann nur noch die Koeffizienten eingetragen. Die auf die jeweilige Gleichung auszuführende Operation wird in die erste Spalte eingetragen z.B. $(-2) \cdot I$.

Das Ergebnis wird als Gleichung notiert z.B. $II' = (-2) \cdot I + II$.

Gauß-Algorithmus (Formelsammlung)

Die folgenden Schritte geben den Algorithmus in Worten wieder.

1. Beginne mit der ersten Gleichung
2. Multipliziere diese Gleichung, mit einem geeigneten Faktor, so dass die ersten Koeffizienten (ungleich Null) negativ gleich groß sind.

z.B. $a_{11} = -3$ und $a_{21} = 5$ Faktor für die erste Gleichung: $\left(-\frac{5}{(-3)}\right)$.

3. Addiere die beiden Gleichungen, so dass im Ergebnis der erste Koeffizient gleich Null wird.
4. Wiederholen der Schritte 2. und 3. mit allen weiteren Gleichungen, so dass in allen Gleichungen (bis auf der ersten) der erste Koeffizient gleich Null ist.
5. Wiederhole die Schritte 2. bis 4. für den nächsten Koeffizienten, bis in der letzten Gleichung nur noch der letzte Koeffizient ungleich Null ist.

Aufgabe 1:

$$(I) \quad x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$$

$$(II) \quad -12x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -6$$

$$(III) \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$\text{Lösung: } L_{x_1; x_2; x_3} = \{(2; 5; -4)\}$$

Aufgabe 2:

$$(I) \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1$$

$$(II) \quad 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3$$

$$(III) \quad 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\text{Lösung: } L_{x_1; x_2; x_3} = \{(1; -9; 6)\}$$

Aufgaben 3:

$$(I) \quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 14$$

$$(II) \quad -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 7$$

$$(III) \quad -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 21$$

$$(IV) \quad 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$\text{Lösung: } L_{x_1; x_2; x_3; x_4} = \{(1; 2; 3; 4)\}$$

S. 30 Aufg. 1.54

$$\text{Lösung: } L_{x_1; x_2; x_3} = \{(-2; 7; -8)\}$$

Interpretation von Sonderlösungen (Formelsammlung)

- untere Dreiecksform \rightarrow eindeutige Lösung
- alle Koeffizienten einer Zeile = 0 & RS = 0 \rightarrow nicht eindeutig, unendlich viele oder keine Lösung
- alle Koeffizienten einer Zeile = 0 & RS $\neq 0$ \rightarrow Widerspruch, keine Lösung