Vorlage:

Kommentar	Koeffizienten			RS
	x_1	x_2	x_3	
I				
II				
III				

Gauß Algorithmus

Ziel

Ein beliebiges LGS in die untere Dreiecksform zubringen, um möglichst einfach zu einer Lösung zu kommen.

$$\begin{array}{lccccccc} (I) & a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & = & k_1 \\ (II) & 0\cdot x_1 & + & a'_{22}\cdot x_2 & + & a'_{23}\cdot x_3 & = & k_2 \\ (III) & 0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & a'_{33}\cdot x_3 & = & k_3 \end{array}$$

Beispiel für Gauß Algorithmus

Um Schreibarbeit zu sparen, wird eine neue Schreibweise eingeführt. Die Variablen x_1, x_2 und x_3 werden als Spaltenköpfe über die Koeffizienten geschrieben. In die Zeilen werden dann nur noch die Koeffizienten eingetragen. Die auf die jeweilige Gleichung auszuführende Operation wird in die erste Spalte eingetragen z.B. $(-2)\cdot I$.

Die folgenden Schritte geben den Algorithmus in Worten wieder.

1. Beginne mit der ersten Gleichung
2. Multiplikation, mit geeignetem Faktor, so dass der ersten Koeffizienten (ungleich Null) negativ gleich groß ist. (z.B. $a_{11} = 3$ und $a_{21} = 5$ Faktor für die erste Gleichung: $(\frac{-5}{3})$.
3. Addition der beiden Gleichungen, so dass im Ergebnis der erste Koeffizient gleich Null wird.
4. Wiederholen der Schritte 2. und 3. mit allen weiteren Gleichungen, so dass in allen Gleichungen (bis auf die erste) der erste Koeffizient gleich Null ist.
5. Wiederhole die Schritte 2., 3. und 4. für den nächsten Koeffizienten, bis in der letzten Gleichung nur noch der letzte Koeffizient ungleich Null ist.

Das Ergebnis wird als Gleichung notiert z.B. $II' = (-2)\cdot I + II$.

Aufgabe 1:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \\ (II) & -12x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \\ (III) & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

$Lösung: \boldsymbol{L}_{x_1;x_2;x_3} = \{(2;5;-4)\}$

Aufgabe 2:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ (II) & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ (III) & 8x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

$Lösung: \boldsymbol{L}_{x_1;x_2;x_3} = \{(1;-9;6)\}$

Aufgaben 3:

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcr} (I) & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 14 \\ (II) & - & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ (III) & - & x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 21 \\ (IV) & & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

$Lösung: \boldsymbol{L}_{x_1;x_2;x_3;x_4} = \{(1;2;3;4)\}$

S. 30 Aufg. 1.54

$Lösung: \boldsymbol{L}_{x_1;x_2;x_3} = \{(-2;7;-8)\}$

Interpretation von Sonderlösungen (Formelsammlung)

- untere Dreiecksform $\rightarrow$ eindeutige Lösung
- alle Koeffizienten einer Zeile =0 & RS =0 $\rightarrow$ nicht eindeutig, unendlich viele oder keine Lösung
- alle Koeffizienten einer Zeile =0 & RS $\neq 0$ $\rightarrow$ Widerspruch, keine Lösung