Allgemeine Berechnung einer Determinante:
Entwicklung nach einer Spalte oder Reihe.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\left(a_{22}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\right)-a_{12}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31}\right)a_{13}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}\right)$$

Spezialverfahren zur Lösung eines 3x3 LGS mit der „Regel von Sarrus"
Gegeben ist folgendes allgemeine 3x3 LGS:

$$\begin{array}{lcccccccc} (I) & a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & = & k_1 \\ (II) & a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & a_{23}\cdot x_3 & = & k_2 \\ (III) & a_{31}\cdot x_1 & + & a_{32}\cdot x_2 & + & a_{33}\cdot x_3 & = & k_3 \end{array}$$

Dies kann als Matrix wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Wie kann mit den bekannten Regeln für Matrizen die Determinante ermittelt werden?

Hauptdiagonalen lassen sich schnell ermitteln:

$D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}+\ldots$ Problem: Wie geht es weiter?

<u>Regel von Sarrus</u>:
Die ersten beiden Spalten werden hinter der letzten Spalte angehängt, um weitere Diagonalen (s. folgende Abbildung) bilden zu können:

$$D=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$$

ACHTUNG: Dabei werden die Diagonalen von RECHTS nach LINKS subtrahiert (negatives Vorzeichen vor dem Produkt). Dies wurde bereits bei der „Cramer'schen Regel" bei 2x2 LGS so praktiziert.

$$D = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

Die Bildung der weiteren Determinanten D_{x1}, D_{x2} und D_{x3} erfolgt, so wie bereits behandelt, durch Austauschen der rechten Spalte (hier k_1 , k_2 und k_3) durch die entsprechende Spalte.

Die Berechnung der Determinanten kann danach ebenfalls gemäß der Regel von Sarrus vorgenommen werden.

$$D_{x1}=\left|\begin{matrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \\ k_3 & a_{32} \end{matrix} \qquad D_{x2}=\left|\begin{matrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \\ a_{31} & k_3 \end{matrix} \qquad D_{x3}=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Die Lösungen werden wie bisher wie folgt ermittelt:

$$x_1=\frac{D_{x1}}{D} \qquad x_2=\frac{D_{x2}}{D} \qquad x_3=\frac{D_{x3}}{D}$$

Die Lösungsmenge lautet demnach: $\boldsymbol{L}=\left\{\left(\frac{D_{x1}}{D} \;\middle|\; \frac{D_{x2}}{D} \;\middle|\; \frac{D_{x3}}{D}\right)\right\}$

Musterlösung: 3x3 nach „Regel von Sarrus“ lösen!

Gegeben ist das folgende LGS
$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & 2\cdot x_1 & - & 3\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & -5 \\ (II) & -3\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 4\cdot x_3 & = & -6 \\ (III) & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 4 \end{array}$$

Lösung:

Schritt 1: Erste und zweite Spalte rechts ergänzen.

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_1 & X_2 \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & 2 & -3 \\ & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & -3 & 2 \\ & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 & 2 \end{array}$$

Schritt 2: Diagonalen multiplizieren. ACHTUNG von rechts nach links mit negativem Vorzeichen!

$$D = 2\cdot2\cdot2 + (-3)\cdot4\cdot1 + 3\cdot(-3)\cdot2 - (-3)\cdot(-3)\cdot2 - 2\cdot4\cdot2 - 3\cdot2\cdot1 =$$
$$8-12-18-18-16-6=-62$$

Schritt 1 und 2 für die weiteren Determinanten durchführen. Jeweils die Spalte der Variable, für die die Determinante ermittelt werden soll, durch die rechte Seite (RS) ersetzen.

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & \boldsymbol{RS} & X_2 & X_3 & \boldsymbol{RS} & X_2 \\ \hline & \boldsymbol{-5} & -3 & 3 & \boldsymbol{-5} & -3 \\ & \boldsymbol{-6} & 2 & 4 & \boldsymbol{-6} & 2 \\ & \boldsymbol{4} & 2 & 2 & \boldsymbol{4} & 2 \end{array}$$

$$\boldsymbol{D_{x1}} = (-5)\cdot2\cdot2 + (-3)\cdot4\cdot4 + 3\cdot(-6)\cdot2 - (-3)\cdot(-6)\cdot2 - (-5)\cdot4\cdot2 - 3\cdot2\cdot4 =$$
$$-20-48-36-36+40-24=\mathbf{-124}$$

$$x_1=\frac{D_{x1}}{D}=\frac{-124}{-62}=2$$

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & X_1 & \boldsymbol{RS} & X_3 & X_1 & \boldsymbol{RS} \\ \hline & 2 & \boldsymbol{-5} & 3 & 2 & \boldsymbol{-5} \\ & -3 & \boldsymbol{-6} & 4 & -3 & \boldsymbol{-6} \\ & 1 & \boldsymbol{4} & 2 & 1 & \boldsymbol{4} \end{array}$$

$$\boldsymbol{D_{x2}} = 2\cdot(-6)\cdot2 + (-5)\cdot4\cdot1 + 3\cdot(-3)\cdot4 - (-5)\cdot(-3)\cdot2 - 2\cdot4\cdot4 - 3\cdot(-6)\cdot1 =$$
$$-24-20-36-30-32+18=\mathbf{-124}$$

$$x_2=\frac{D_{x2}}{D}=\frac{-124}{-62}=2$$

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & X_1 & X_2 & \boldsymbol{RS} & X_1 & X_2 \\ \hline & 2 & -3 & \boldsymbol{-5} & 2 & -3 \\ & -3 & 2 & \boldsymbol{-6} & -3 & 2 \\ & 1 & 2 & \boldsymbol{4} & 1 & 2 \end{array}$$

$$\boldsymbol{D_{x3}} = 2\cdot2\cdot4 + (-3)\cdot(-6)\cdot1 + (-5)\cdot(-3)\cdot2 - (-3)\cdot(-3)\cdot4 - 2\cdot(-6)\cdot2 - (-5)\cdot2\cdot1 =$$
$$16+18+30-36+24+10=\mathbf{62}$$

$$x_3=\frac{D_{x3}}{D}=\frac{62}{-62}=-1$$

Lösungsmenge: $\boldsymbol{L}=\{(2|2|-1)\}$