

Allgemeine Berechnung einer Determinante:

Entwicklung nach einer Spalte oder Reihe.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Spezialverfahren zur Lösung eines 3x3 LGS mit der „Regel von Sarrus“

Gegeben ist folgendes allgemeine 3x3 LGS:

$$\begin{aligned} (I) \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = k_1 \\ (II) \quad & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = k_2 \\ (III) \quad & a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = k_3 \end{aligned}$$

Dies kann als Matrix wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Wie kann mit den bekannten Regeln für Matrizen die Determinante ermittelt werden?

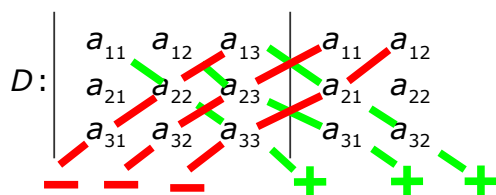
Hauptdiagonalen lassen sich schnell ermitteln:

$$D = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} + \dots \quad \text{Problem: Wie geht es weiter?}$$

Regel von Sarrus:

Die ersten beiden Spalten werden hinter der letzten Spalte angehängt, um weitere Diagonalen

(s. folgende Abbildung) bilden zu können:



ACHTUNG: Dabei werden die Diagonalen von RECHTS nach LINKS subtrahiert (negatives Vorzeichen vor dem Produkt). Dies wurde bereits bei der „Cramer’schen Regel“ bei 2x2 LGS so praktiziert.

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Die Bildung der weiteren Determinanten D_{x1} , D_{x2} und D_{x3} erfolgt, so wie bereits behandelt, durch Austauschen der rechten Spalte (hier k_1 , k_2 und k_3) durch die entsprechende Spalte.

Die Berechnung der Determinanten kann danach ebenfalls gemäß der **Regel von Sarrus** vorgenommen werden.

$$D_{x1}: \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{x2}: \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{x3}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}$$

$$D_{x1} = k_1 \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot k_3 + a_{13} \cdot k_2 \cdot a_{32} - a_{12} \cdot k_2 \cdot a_{33} - k_1 \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot k_3$$

$$D_{x2} = a_{11} \cdot k_2 \cdot a_{33} + k_1 \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot k_3 - k_1 \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot k_3 - a_{13} \cdot k_2 \cdot a_{31}$$

$$D_{x3} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot k_3 + a_{12} \cdot k_2 \cdot a_{31} + k_1 \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot k_3 - a_{11} \cdot k_2 \cdot a_{32} - k_1 \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Die Lösungen werden wie bisher wie folgt ermittelt:

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D} \quad x_2 = \frac{D_{x2}}{D} \quad x_3 = \frac{D_{x3}}{D} \quad \text{Die Lösungsmenge lautet demnach: } \mathbf{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x1}}{D} \mid \frac{D_{x2}}{D} \mid \frac{D_{x3}}{D} \right) \right\}$$

Musterlösung: 3x3 nach „Regel von Sarrus“ lösen!

Gegeben ist das folgende LGS

$$\begin{aligned} (I) \quad & 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = -5 \\ (II) \quad & -3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6 \\ (III) \quad & x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 4 \end{aligned}$$

Lösung:

Schritt 1: Erste und zweite Spalte rechts ergänzen.

$$\begin{array}{ccc|cc} X_1 & X_2 & X_3 & X_1 & X_2 \\ \hline 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Schritt 2: Diagonalen multiplizieren. ACHTUNG von rechts nach links mit negativem Vorzeichen!

$$D = 2 \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 - 12 - 18 - 18 - 16 - 6 = -62$$

Schritt 1 und 2 für die weiteren Determinanten durchführen. Jeweils die Spalte der Variable, für die die Determinante ermittelt werden soll, durch die rechte Seite (RS) ersetzen.

$$\begin{array}{ccc|cc} \text{RS} & X_2 & X_3 & \text{RS} & X_2 \\ \hline -5 & -3 & 3 & -5 & -3 \\ -6 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

$$D_{x_1} = (-5) \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) \cdot 2 - (-3) \cdot (-6) \cdot 2 - (-5) \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = -20 - 48 - 36 - 36 + 40 - 24 = -124$$

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{-124}{-62} = 2$$

$$\begin{array}{ccc|cc} X_1 & \text{RS} & X_3 & X_1 & \text{RS} \\ \hline 2 & -5 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & -6 & 4 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$$D_{x_2} = 2 \cdot (-6) \cdot 2 + (-5) \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \cdot 4 - (-5) \cdot (-3) \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot (-6) \cdot 1 = -24 - 20 - 36 - 30 - 32 + 18 = -124$$

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{-124}{-62} = 2$$

$$\begin{array}{ccc|cc} X_1 & X_2 & \text{RS} & X_1 & X_2 \\ \hline 2 & -3 & -5 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}$$

$$D_{x_3} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-6) \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) \cdot 4 - 2 \cdot (-6) \cdot 2 - (-5) \cdot 2 \cdot 1 = 16 + 18 + 30 - 36 + 24 + 10 = 62$$

$$x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{62}{-62} = -1$$

Lösungsmenge: $L = \{(2|2|-1)\}$