Binomischer-Lehrsatz:

Mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks lassen sich theoretisch alle Koeffizienten eines beliebigen natürlichen Binoms ermitteln. Allerdings wird der Aufwand für große Exponenten sehr groß, da immer zunächst das gesamte Dreieck bis zum betreffenden Exponenten hergeleitet werden muss.
Im binomischen-Lehrsatz werden diese Koeffizienten mithilfe des sogenannten Binomialkoeffizienten ermittelt.

Definition binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)} \cdot b^k$$
$$= \binom{n}{0} a^{(n-0)} \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{(n-1)} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{(n-2)} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{(n-(n-1))} \cdot b^{(n-1)} + \binom{n}{n} a^{(n-n)} \cdot b^n$$

für $n, k \in \mathbb{N}$

Wie ermittelt man nun einen bestimmten Term eines Binoms n-ter Ordnung?
Gegeben ist $(a+b)^n$ Gesucht wird der Faktor vor einem beliebigen a^m mit $(m \leq n)$

1. Exponenten der beiden Terme a und b: $a^{(n-k)}$ bzw. $b^{(k)}$ bestimmen.
2. Binomial-Koeffizient ermitteln: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ mit Taschenrechner $\boxed{\mathbf{n}}$ $\boxed{\mathbf{nCr}}$ $\boxed{\mathbf{k}}$ **=** $\binom{n}{k}$
3. Ggf. Vorzeichen ermitteln:
   Bei negativen Zahlen/Variabeln richtet sich das Vorzeichen danach, ob der Exponent der betreffenden Komponente gerade (+) bzw. ungerade (-) ist (s. Musterlösung).
4. Falls a bzw. b Terme sind, die zusätzliche Zahlen enthalten, so sind diese mit den Exponenten von a bzw. b zu ermitteln.

Beispiele:

1. $$(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^5 \cdot b^0 + \binom{5}{1} a^4 \cdot b^1 + \binom{5}{2} a^3 \cdot b^2 + \binom{5}{3} a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4} a^1 \cdot b^4 + \binom{5}{5} a^0 \cdot b^5$$
$$= a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

2. $$(a+4)^5 = \binom{5}{0} a^5 \cdot 4^0 + \binom{5}{1} a^4 \cdot 4^1 + \binom{5}{2} a^3 \cdot 4^2 + \binom{5}{3} a^2 \cdot 4^3 + \binom{5}{4} a^1 \cdot 4^4 + \binom{5}{5} a^0 \cdot 4^5$$

Ermitteln Sie den Faktor vor a^3 (ausführliche Rechnung mit Fakultäten):

$$\binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot 4^2 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot a^3 \cdot 16 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2)} \cdot a^3 \cdot 16 = 10 \cdot a^3 \cdot 16 = 160\, a^3$$

Musterlösung

Gegeben ist folgender Term: $(a-3)^7$
Geben Sie den Faktor vor a^4 an!

Rechnung:

$$n = 7 \quad \Rightarrow 7 - 4 = 3 = k$$
$$\binom{7}{(7-4)} \cdot a^4 \cdot (-3)^{7-4} = \binom{7}{3} \cdot a^4\, (-3)^3 = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} \cdot a^4 \cdot (-27) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} \cdot a^4 \cdot (-27)$$
$$= 35 \cdot a^4 \cdot (-27) = -945 \cdot a^4$$

Lösung:

Der Faktor vor a^4 lautet -945.

Ergänzungen:

Die beiden Rechenoperationenu $x\,!$ nd $\sum$ werden wie folgt definiert.

1. Definition $n\,!$ (*sprich: „Fakultät von n“*)

$n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$

$0\,! = 1$ (per Definition)

2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ (sprich: „Summe von k = 0 bis k = n“)

Es wird im Term hinter dem Summenzeichen (hier: $\frac{1}{k}$) für k jeweils alle Werte von 1 bis n eingesetzt und aufaddiert.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{n}$$

Übungsaufgaben[1]:

Aufgabe 1:

Geben Sie für den Term a^m den jeweiligen Faktor an.

a) $(a+b)^9$ Faktor für a^7

b) $(a-b)^{24}$ Faktor für a^{21}

c) $(a-3\,b)^{10}$ Faktor für a^4

d) $(4\,a-5\,b)^6$ Faktor für a^3

Aufgabe 2:

Berechnen Sie alle Terme durch Anwendung des Binominal-Satzes (ohne mehrfaches Ausklammern).

a) $(2\,a+3\,b)^4$

b) $(4\,a-5\,b)^5$

c) $(-2\,a+3\,b)^6$

d) $\left(\frac{2}{a} - 3\sqrt{b}\right)^4$

Aufgabe 3:

Erstellen Sie ein Programm mit einer beliebigen Programmiersprache, welche nach Eingabe von n alle Binomialkoeffizienten ermittelt.

1 Pfeffer 7. Auflage S. 20 Aufg. 1.28

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 1:

zu a)

$(a+b)^9$ Faktor für $a^7 \Rightarrow n=9$ und $n-k=7 \Leftrightarrow k=2 \Rightarrow b^2$

$\binom{9}{2} = \frac{9\,!}{(9-2)\,!\cdot 2\,!} = \frac{9\cdot 8}{2\,!} = 36$

Der Term lautet: $36\cdot a^7 \cdot b^2$

zu b)

$(a-b)^{24}$ Faktor für $a^{21} \Rightarrow n=24$ und $n-k=21 \Leftrightarrow k=3 \Rightarrow b^3$

$\binom{24}{3} = \frac{24\,!}{(24-3)\,!\cdot 3\,!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22}{3\,!} = 2024$

Da k ungerade und b negativ ist, lautet der Term $-2024\cdot a^{21}\cdot b^3$

zu c)

$(a-3\,b)^{10}$ Faktor für $a^6 \Rightarrow n=10$ und $n-k=6 \Leftrightarrow k=4 \Rightarrow b^4$

$\binom{10}{4} = \frac{10\,!}{(10-4)\,!\cdot 4\,!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\,!} = 210$

$(-3)^4 = 81$

Da k gerade und b negativ ist, lautet der Term $210\cdot 81 = 17.010\cdot a^6\cdot b^4$

zu d)

$(4\,a-5\,b)^6$ Faktor für $a^3 \Rightarrow n=6$ und $n-k=3 \Leftrightarrow k=3 \Rightarrow b^3$

$\binom{6}{3} = 20$

für 4a: $(4)^3\cdot a^3 = 64\cdot a^3$

für -5b: $(-5)^3\cdot b^3 = -125\cdot b^3$

Da k ungerade und b negativ ist, lautet der Term $20\cdot 64\cdot(-125) = 150.000\cdot a^3\cdot b^3$

Lösung zu Aufgabe 2:

zu a)

$$(2\cdot a+3\cdot b)^4=\binom{4}{0}(2\cdot a)^4\cdot(3\cdot b)^0+\binom{4}{1}(2\cdot a)^3\cdot(3\cdot b)^1+\binom{4}{2}(2\cdot a)^2\cdot(3\cdot b)^2+\binom{4}{3}(2\cdot a)^1\cdot(3\cdot b)^3+\binom{4}{4}(2\cdot a)^0\cdot(3\cdot b)^4$$
$$=16\cdot a^4+4\cdot 8\cdot a^3\cdot 3\cdot b+6\cdot 4\cdot a^2\cdot 9\cdot b^2+4\cdot 2\cdot a\cdot 27\cdot b^3+b^4$$
$$=\underline{\mathbf{16\cdot a^4+96\cdot a^3\cdot b+216\cdot a^2\cdot b^2+216\cdot a\cdot b^3+b^4}}$$

zu b)

$$(4\cdot a-5\cdot b)^5$$
$$=\binom{5}{0}(4\cdot a)^5+\binom{5}{1}(4\cdot a)^4\cdot(-5\cdot b)^1+\binom{5}{2}(4\cdot a)^3\cdot(-5\cdot b)^2+\binom{5}{3}(4\cdot a)^2\cdot(-5\cdot b)^3+\binom{5}{4}(4\cdot a)^1\cdot(-5\cdot b)^4+\binom{5}{5}(-5\cdot b)^5$$
$$=1024\cdot a^5+5\cdot 256\cdot a^4\cdot(-5)\cdot b+10\cdot 64\cdot a^3\cdot 25\cdot b^2+10\cdot 16\cdot a^2\cdot(-125)\cdot b^3+5\cdot 4\cdot a\cdot 625\cdot b^4+(-3125)\,b^5$$
$$=\underline{\mathbf{1024\cdot a^5-6400\cdot a^4\cdot b+16.000\cdot a^3\cdot b^2-20.000\cdot a^2\cdot b^3+12.500\cdot a\cdot b^4-3.125\,b^5}}$$

zu c)

$$(-2\,a+3\,b)^6=\binom{6}{0}(-2\cdot a)^6+\binom{6}{1}(-2\cdot a)^5\cdot(3\cdot b)^1+\binom{6}{2}(-2\cdot a)^4\cdot(3\cdot b)^2+\binom{6}{3}(-2\cdot a)^3\cdot(3\cdot b)^3+\binom{6}{4}(-2\cdot a)^2\cdot(3\cdot b)^4$$
$$+\binom{6}{5}(-2\cdot a)^1\cdot(3\cdot b)^5+\binom{6}{6}(3\cdot b)^6$$
$$=4\cdot a^6+6\cdot(-32)\cdot a^5\cdot 3\cdot b^1+15\cdot 16\cdot a^4\cdot 9\cdot b^2+20\cdot(-8)\cdot a^3\cdot 27\cdot b^3+15\cdot 4\cdot a^2\cdot 81\cdot b^4+6\cdot(-2)\cdot a\cdot 243\cdot b^5+729\,b^6$$
$$=\underline{\mathbf{4\cdot a^6-576\cdot a^5\cdot b+2.160\cdot a^4\cdot b^2-4.320\cdot a^3\cdot b^3+4.860\cdot a^2\cdot b^4-2.916\cdot a\cdot b^5+729\,b^6}}$$

zu d)

$$\left(\frac{2}{a}-3\sqrt{b}\right)^4 \quad \text{t.b.d}$$