

Verhältnisgleichungen und Dreisatz

Man kennt in der Natur und Technik häufig **Abhängigkeiten zwischen zwei Größen**. Dies wird dann als Zuordnung einer Größe zu einer anderen verstanden.

Beispiele:

- Einer Warenmenge wird ein Preis zugeordnet _____
- Einem Rauminhalt wird ein Gewicht zugeordnet _____
- Einer Wegstrecke wird eine Zeit zugeordnet _____
- Einer Zeit wird eine Anzahl zugeordnet: _____

Beispiel: Brötchen → Preis

Anzahl Brötchen	1	2	3	4	...
Preis in Cent	40	80	120	160	...

Die Berechnung des Preises erfolgt über einen linearen Proportionalitätsfaktor k mit der Einheit

$$\left[\frac{\text{Preis}}{\text{Brötchen}} \right]$$

Allgemein kann also geschrieben werden: $b_n = k \cdot a_n$

mit b_n dem Gesamtpreis und a_n der Anzahl Brötchen.

Beispiel: Dauer einer Fahrradtour → Zurückgelegte Strecke

Nach Stunden	1	2	3	4	...
Gefahrene km	16	36	55	70	...

Bei dieser Zuordnung lässt sich nicht nach der ersten Einheit (1h) ablesen, wie viele km nach 4h zurückgelegt werden. Dies liegt an der nicht konstanten Fortbewegung. Es lässt sich lediglich eine Durchschnittsgeschwindigkeit angeben.

Für Verhältnisgleichungen gilt folgender Zusammenhang: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ man nennt sie **quotientengleich**.

Beispiel: 5kg Kartoffeln kosten 2,50 €

Wie viel € kosten 3kg dieser Kartoffeln?

Lösung: $\frac{2,50\text{€}}{5\text{kg}} = \frac{x}{3\text{kg}}$ Durch Multiplikation erhält man: $x = 1,5\text{€}$

Man nennt solche Zusammenhänge auch **proportional**.

Derartige Fragestellungen lassen sich mittels des Dreisatzes lösen.

Dreisatz

Der Dreisatz lässt durch folgende Regel zusammenfassen.

1. Bringe die gegebene Größe (im obigen Beispiel 5kg) durch Division auf den Wert 1.
2. Dividiere die zugeordnete Größe durch denselben Faktor.
3. Multipliziere die zugeordnete Größe mit dem Faktor der gesuchten Größe (im obigen Beispiel 3kg).

Die folgende Tabelle verdeutlicht das Vorgehen.

	Gewicht [kg]	Preis [€]	
	5	2,5	
:5	1	0,5	:5
*3	3	1,50	*3

Umgekehrte / indirekte Proportionalität

Bei umgekehrter Proportionalität bedeutet ein mehr des Einen ein weniger des Anderen.

Beispiel: Ein LKW-Fahrer kann den Abraum einer Grube in 10h abtransportieren.

In welcher Zeit können zwei LKW-Fahrer den Abraum abtransportieren?

$$10h = \frac{\text{Abraum}}{1 \text{ Fahrer}} \Rightarrow x = \frac{\text{Abraum}}{2 \text{ Fahrer}}$$

Da der Abraum konstant ist wird sich die benötigte Zeit entsprechende

der Anzahl der Fahrer verringern.

2 Fahrer → halbieren; 3 Fahrer → dritteln; 4 Fahrer → vierteln.

Man kann dies auch als Produktgleichung angeben:

$$\text{Abraum} = 10h \cdot 1 \text{ Fahrer} = 5h \cdot 2 \text{ Fahrer} = 2,5h \cdot 4 \text{ Fahrer}$$

Das Produkt bleibt also immer gleich (hier der Abraum) man nennt solche **umgekehrt Proportionalitäten** daher **produktgleich**.

Aufgaben

- In der Klasse 10a lernen von 31 Schülern und Schülerinnen 21 Französisch und in der Klasse 10b sind es 23 von 33. In welcher Klasse lernen verhältnismäßig mehr Schüler Französisch?
- Marie hat beim Sportfest 495 von 700 möglichen Punkten erreicht, ihr kleiner Bruder Jakob 348 von 550 möglichen Punkten. Wer hat erfolgreicher am Sportfest teilgenommen?
- Welche Aussagen sind gleichwertig?
 - Jeder vierte Schüler einer Klasse spielt Fußball.
 - Auf einen Schüler, der Fußball spielt, kommen vier Schüler, die nicht Fußball spielen.
 - Das Verhältnis der Fußball spielenden Schüler zu den nicht Fußball spielenden Schülern beträgt 1:4.
 - Der Anteil der Fußball spielenden Schüler in der Klasse beträgt $\frac{1}{4}$.
- Orangen- und Karottensaft sollen im Verhältnis 2:3 gemischt werden. Wie viel ml Orangensaft müssen hinzugefügt werden, wenn sich in einem Glas bereits 150 ml Karottensaft befinden?
- Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um proportionale Zuordnungen handelt.
 - Der Körpergröße wird das Gewicht zugeordnet.
 - Der Dauer eines Telefonats wird der Preis zugeordnet.
 - Einer bestimmten Joghurtmenge wird deren Fettgehalt zugeordnet.
 - Schreiben Sie die Zahlen als Summe von Zehnerpotenzen.
- Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um proportionale Zuordnungen handelt
 -

Ausgangsgröße	1	2	3	4	5
Zugeordnete Größe	6	12	18	24	30

b)

Ausgangsgröße	3	4	5	6	7
Zugeordnete Größe	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3

- Eine Klasse plant eine Klassenfahrt. Die Unterkunft kostet pro Schüler(in) 75€. Der Bustransfer kostet pauschal 800€. Berechnen Sie, wie viel die Klasse insgesamt für die Unterkunft bezahlen muss, wenn
 - alle 31 Schüler und Schülerinnen mitfahren und
 - nur 29 Schüler und Schülerinnen mitfahren.
- Anna kauft beim Gemüsehändler 2,5 kg Weintrauben und bezahlt dafür 4,95 Euro. Ihre Mutter fragt sie nun, wie viel 1 kg Weintrauben gekostet hat? Wie viel hätte Anna für 3 kg Weintrauben bezahlen müssen?
- Ein Imbissbesitzer kauft 300 Würstchen für 105 Euro.
 - Wie viel muss er mindestens für ein Würstchen verlangen, damit er keinen Verlust macht?
 - Wie viel muss er mindestens für zwei Würstchen verlangen, damit er keinen Verlust macht?

10. Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um eine indirekt (umgekehrt) proportionale Zuordnung handelt.
- Der Anzahl der Hamster wird die Anzahl der Tage, die eine bestimmte Futtermenge ausreicht, zugeordnet.
 - Der Anzahl der eingesetzten LKWs wird die Menge an transportiertem Holz zugeordnet.
 - Der Anzahl der eingesetzten LKWs wird die für den Transport einer bestimmten Menge Holz benötigte Zeit zugeordnet.
 - Ein Brot wird in Scheiben geschnitten. Der Anzahl der Scheiben wird die Dicke der Scheiben zugeordnet.
11. Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um indirekt proportionale Zuordnungen handelt.

a)

Ausgangsgröße	1	2	3	4	5
Zugeordnete Größe	4	2	4/3	1	0,8

b)

Ausgangsgröße	4	5	6	7	8
Zugeordnete Größe	2	2,5	3	3,5	4

12. 8 Arbeiter erledigen einen Bauauftrag in genau 12 Arbeitstagen. Wie lange würden 6 Arbeiter für denselben Bauauftrag benötigen?

Überlegen Sie bei den folgenden Aufgaben zunächst, ob direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt und lösen Sie dann die Aufgaben.

- Berechnen Sie die Höhe eines Kirchturms, der einen Schatten von 12 m wirft, wenn gleichzeitig ein 90 cm langer Stock einen Schatten von 60 cm hat.
- Um eine Abraumhalde abzutragen, benötigen 8 LKW 6 Tage. In wie viel Tagen bewältigten 6 LKW diese Arbeit?
- Wie viel Euro Zinsen erhält man für 6000 € in einem Jahr, wenn 2500 € im Jahr 37,50 € Zinsen erbringen?
- Ein Bild ist 64 mm lang und 50 mm breit. Welche Breite erhält das Bild beim Druck, wenn die Länge auf 40 mm verringert wird.
- Auf einer Wanderkarte ist die Strecke von A nach B 12 mm lang. In Wirklichkeit beträgt sie 7200 m. Die Strecke von A nach C ist auf der Karte 15 mm lang. Wie lang ist sie in Wirklichkeit?
- Die 25 Schüler einer Klasse sollen für die Finanzierung eines Schulausflugs jeder 16 € zahlen. Dieser Wert wurde unter der Annahme berechnet, dass alle Schüler mitfahren. Am Ausflugstag können 5 Schüler nicht mitfahren. Wie viel Euro muss jeder Schüler nun zahlen?